Teoria grafurilor

Aplicații la grafuri complete și grafuri bipartite

Notații și rezultate folosite

- K_n este graful complet cu n vârfuri. Are $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ muchii, iar fiecare vârf are gradul $n-1$.
- $K_{m,n}$ este graful bipartit complet cu părțile de mărimi m și n. Are mn muchii.
- Un graf $G = (V, E)$ este bipartit dacă $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, și orice muchie are un capăt în A și unul în B.
- *Teorema de caracterizare (König):* un graf este bipartit dacă și numai dacă nu conține cicluri de lungime impară.
- *Lema strângerilor de mână:* $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.
- *Cuplaj.* Un *cuplaj* într-un graf $G = (V, E)$ este o mulțime $M \subseteq E$ de muchii care, două câte două, nu au niciun capăt comun. Altfel spus, fiecare vârf este capăt pentru cel mult o muchie din M. Interpretarea uzuală: vârfurile sunt persoane, sarcini, echipe etc., iar muchiile din M sunt perechi formate simultan, fără ca cineva să facă parte din două perechi. Un cuplaj este *maxim* dacă are cel mai mare număr posibil de muchii și *perfect* dacă fiecare vârf al grafului este capăt al unei muchii din M (atunci $|V|$ este par și $|M| = |V|/2$).

  Exemplu: în ciclul C_4 cu vârfurile $1, 2, 3, 4$ (în această ordine), $\{12, 34\}$ este un cuplaj perfect, $\{12\}$ este un cuplaj care nu e maxim, iar $\{12, 23\}$ nu este cuplaj, deoarece muchiile au capătul comun 2.

  Fiind dat un cuplaj M, un *drum alternant* este un drum ale cărui muchii sunt alternativ în afara lui M și în M. Un drum alternant care începe și se termină în vârfuri care nu sunt capete ale muchiilor din M se numește *augmentant*: schimbând rolurile muchiilor de pe el (cele din M ies, celelalte intră) se obține un cuplaj cu o muchie în plus. *Teorema lui Berge:* un cuplaj este maxim dacă și numai dacă nu admite drumuri augmentante.
- *Factori și 1-factorizări.* Un *factor* al lui $G = (V, E)$ este un subgraf care conține toate vârfurile lui G. Un *k-factor* este un factor în care fiecare vârf are gradul k. Un 1-factor este deci exact un cuplaj perfect, privit ca subgraf. O *1-factorizare* a lui G este o partiție a mulțimii muchiilor E în 1-factori, adică o scriere a lui E ca reuniune disjunctă de cuplaje perfecte.

  Dacă G are o 1-factorizare, fiecare vârf apare exact o dată în fiecare cuplaj, deci G este regulat. Dacă are gradul k, numărul cuplajelor este exact k. Echivalent, o 1-factorizare a unui graf k-regulat este o colorare a muchiilor cu k culori în care muchiile cu un capăt comun au culori diferite (fiecare clasă de culoare este un cuplaj perfect).

  Exemplu: K_4, cu vârfurile $1, 2, 3, 4$, are 1-factorizarea $\{12, 34\} \cup \{13, 24\} \cup \{14, 23\}$. Graful K_n are o 1-factorizare dacă și numai dacă n este par (Problema 1). Orice graf bipartit k-regulat are o 1-factorizare (teorema lui König, Problema 12). În aplicații, o 1-factorizare a lui K_n este un program de turneu în $n-1$ etape, în care fiecare echipă joacă exact o dată pe etapă.
- *Teorema lui Hall.* Fie M un cuplaj în $G = (V, E)$. Un vârf este *saturat* de M dacă este capăt al unei muchii din M. Spunem că M *saturează* mulțimea A dacă fiecare vârf

din A este saturat de M (în particular, $|M| \geq |A|$). Astfel, un cuplaj este perfect exact când saturează toate vârfurile. Pentru $S \subseteq V$, *vecinătatea* lui S este $N(S) = \{w \in V :$ există $v \in S$ cu $vw \in E\}$, mulțimea vârfurilor adiacente cu cel puțin un vârf din S.

Enunț: un graf bipartit cu părțile A și B are un cuplaj care saturează A dacă și numai dacă $|N(S)| \geq |S|$ pentru orice $S \subseteq A$ (*condiția lui Hall*). Într-un graf bipartit, $N(S) \subseteq B$ pentru $S \subseteq A$. Forma cu deficiență: numărul maxim de muchii ale unui cuplaj este $|A| - \max_{S \subseteq A}\big(|S| - |N(S)|\big)$.

- *Cicluri și drumuri euleriene.* Un *ciclu eulerian* este un traseu închis care trece exact o dată prin fiecare muchie a grafului (vârfurile se pot repeta). Un *drum eulerian* este un traseu, nu neapărat închis, cu aceeași proprietate.

  Teorema lui Euler. Un graf conex are un ciclu eulerian dacă și numai dacă toate vârfurile au grad par. Un graf conex are un drum eulerian care nu este închis dacă și numai dacă are exact două vârfuri de grad impar, iar acestea sunt capetele drumului. Rezultatele rămân valabile pentru grafuri cu muchii multiple și bucle (o buclă adaugă 2 la gradul vârfului). Demonstrația este dată în Problema 7.

- *Turnee.* Un *turneu* cu n vârfuri se obține orientând fiecare muchie a lui K_n: între oricare două vârfuri distincte există exact un arc. Interpretarea: un campionat fără egaluri, în care arcul $u \to v$ înseamnă că u l-a învins pe v. *Scorul* unui vârf este numărul arcelor care pleacă din el (numărul victoriilor).

  Teorema lui Rédei. Orice turneu are un *drum hamiltonian orientat* $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$, adică echipele pot fi ordonate astfel încât fiecare să o fi învins pe următoarea. Demonstrația este dată în Problema 2.

- *Cuplaje stabile.* Fie un graf bipartit complet $K_{n,n}$ cu părțile A și B, în care fiecare vârf are o listă de preferințe (o ordonare strictă a vârfurilor din cealaltă parte). Un cuplaj perfect M este *instabil* dacă există $a \in A$ și $b \in B$, necuplați între ei în M, care se preferă reciproc partenerilor primiți în M. O astfel de pereche se numește *pereche blocantă*. Un cuplaj perfect fără perechi blocante este *stabil*.

  Teorema lui Gale și Shapley. Pentru orice liste de preferințe există un cuplaj stabil, iar el se obține prin *algoritmul cererilor* (Problema 11).

- *Pătrate latine.* Un *pătrat latin* de ordin n este o matrice $n \times n$ cu elemente din $\{1, \ldots, n\}$, în care fiecare număr apare exact o dată pe fiecare linie și exact o dată pe fiecare coloană. Pătratele latine de ordin n corespund colorărilor muchiilor lui $K_{n,n}$ cu n culori: elementul de pe linia i și coloana j este culoarea muchiei $a_i b_j$ (Problema 13).

- *Formula lui Euler* pentru grafuri planare conexe: $v - e + f = 2$.

Problema de atribuire și algoritmul ungar

Formularea problemei. Avem n agenți și n sarcini. Atribuirea agentului i la sarcina j costă $c_{ij} \geq 0$. Se cere o permutare $\sigma \in S_n$ care minimizează

$$C(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} c_{i\sigma(i)}.$$

În limbaj de grafuri: în $K_{n,n}$ cu părțile $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (agenți) și $\{b_1, \ldots, b_n\}$ (sarcini), muchia $a_i b_j$ are ponderea c_{ij}, iar o atribuire este un cuplaj perfect. Căutăm cuplajul perfect de pondere minimă. Enumerarea directă cere $n!$ evaluări. Algoritmul ungar (Kuhn, 1955, pe baza rezultatelor lui König și Egerváry) rezolvă problema în timp polinomial.

Zerouri independente. Fie (a_{ij}) o matrice cu n linii și n coloane. Spunem că zerourile aflate pe pozițiile $(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)$ sunt *independente* dacă $a_{i_1 j_1} = \cdots = a_{i_k j_k} = 0$, liniile $i_1, \ldots, i_k$ sunt distincte și coloanele $j_1, \ldots, j_k$ sunt distincte, adică oricare două dintre ele se află pe linii diferite și pe coloane diferite. Într-o matrice $n \times n$ pot exista cel mult n zerouri independente. Matricea are n zerouri independente dacă și numai dacă există o permutare $\sigma \in S_n$ cu $a_{i\sigma(i)} = 0$ pentru orice i, deci câte un zero pe fiecare linie și pe fiecare coloană.

De exemplu, în matricea

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zerourile de pe pozițiile $(1, 2)$ și $(3, 1)$ sunt independente, dar $(1, 2)$ și $(2, 2)$ nu sunt, fiind pe aceeași coloană. Liniile 1 și 2 au zerouri numai în coloana 2, deci cel mult una dintre ele poate primi un zero independent: numărul maxim de zerouri independente este 2, nu 3.

În limbaj de grafuri, considerăm graful bipartit care are ca vârfuri liniile și coloanele matricei, cu o muchie între linia i și coloana j pentru fiecare $a_{ij} = 0$. Atunci zerourile independente formează exact un cuplaj, iar n zerouri independente formează un cuplaj perfect.

Două fapte pe care se sprijină algoritmul.

(i) *Transformări echivalente.* Pornim de la matricea costurilor (c_{ij}). Fie $u_1, \ldots, u_n$ și $v_1, \ldots, v_n$ numere reale. Din fiecare linie i a matricei (c_{ij}) scădem u_i, iar din fiecare coloană j scădem v_j. Obținem matricea (c'_{ij}) cu

$$c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Notăm cu $C'(\sigma) = \sum_i c'_{i\sigma(i)}$ costul unei atribuiri în noua matrice. Cum o permutare σ folosește exact un element din fiecare linie și din fiecare coloană, pentru orice $\sigma \in S_n$ avem

$$C'(\sigma) = C(\sigma) - \sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{j=1}^{n} v_j.$$

Toate atribuirile se modifică cu aceeași constantă, deci au aceeași ordine: o atribuire optimă pentru (c'_{ij}) este optimă și pentru (c_{ij}).

Pașii 1, 2 și 4 de mai jos sunt transformări de acest tip aplicate matricei curente. Compunerea lor este tot o transformare de acest tip față de matricea inițială: u_i și v_j sunt atunci cantitățile scăzute în total din linia i, respectiv coloana j, de la început până la pasul curent (o cantitate adunată se numără cu semnul minus).

(ii) *Criteriul de optimalitate.* Dacă $c'_{ij} \ge 0$ pentru toți i, j și există o atribuire σ cu $c'_{i\sigma(i)} = 0$ pentru orice i (adică n zerouri *independente*, câte unul pe fiecare linie și coloană), atunci $C'(\sigma) = 0$ este minimul lui C', deci σ este optimă, iar costul ei este $\sum u_i + \sum v_j$.

Teorema König–Egerváry. Într-o matrice, numărul maxim de zerouri independente este egal cu numărul minim de linii (rânduri sau coloane) care acoperă toate zerourile. Este forma matriceală a teoremei lui König pentru grafuri bipartite: zerourile sunt muchiile unui graf bipartit între rânduri și coloane, zerourile independente formează un cuplaj, iar liniile care le acoperă formează o acoperire cu vârfuri.

Pașii algoritmului.

Pasul 1. *Reducerea pe linii.* Din fiecare linie scădem minimul ei. Fiecare linie conține acum cel puțin un zero.

Pasul 2. *Reducerea pe coloane.* Din fiecare coloană scădem minimul ei. Fiecare coloană conține acum cel puțin un zero. Toate elementele sunt nenegative.

Pasul 3. *Testul de optimalitate.* Acoperim toate zerourile cu un număr minim k de linii (rânduri sau coloane). Dacă $k = n$, există n zerouri independente (König–Egerváry) și trecem la Pasul 5.

Pasul 4. *Modificarea matricei* (când $k < n$). Fie $\delta > 0$ cel mai mic element neacoperit.

- Scădem δ din fiecare element neacoperit.
- Adunăm δ la fiecare element acoperit de două linii (intersecții).
- Elementele acoperite de o singură linie rămân neschimbate.

Revenim la Pasul 3.

Pasul 5. *Citirea atribuirii.* Alegem n zerouri independente: începem cu o linie (sau coloană) care conține un singur zero, îl selectăm, eliminăm linia și coloana lui și repetăm. Dacă toate liniile rămase au cel puțin două zerouri, alegem unul arbitrar și continuăm (în caz de blocaj se revine asupra alegerii). Costul optim se calculează în matricea *inițială*.

De ce funcționează Pasul 4. Să presupunem că liniile de acoperire sunt r rânduri și s coloane, cu $r + s = k < n$. Pasul 4 este o transformare echivalentă: scădem δ din cele $n - r$ rânduri neacoperite și adunăm δ la cele s coloane acoperite. Un element neacoperit scade cu δ, unul aflat la intersecția a două linii crește cu δ, iar celelalte rămân neschimbate. Prin alegerea lui δ, elementele rămân nenegative și apare cel puțin un zero nou neacoperit. Conform faptului (i), costul oricărei atribuiri scade cu

$$\delta\,(n - r) - \delta\, s = \delta\,(n - k) > 0.$$

Așadar suma constantelor scăzute, $\sum u_i + \sum v_j$, care este o margine inferioară pentru optim, crește strict la fiecare iterație. Pentru costuri întregi, $\delta \geq 1$, iar marginea inferioară nu poate depăși optimul, deci algoritmul se oprește după un număr finit de pași. Cu o implementare atentă (căutarea drumurilor augmentante și actualizarea potențialelor), complexitatea este $O(n^3)$.

Interpretare duală. Problema de atribuire este un program liniar al cărui dual cere $\max \sum u_i + \sum v_j$ cu $u_i + v_j \leq c_{ij}$. Constantele scăzute de algoritm sunt exact variabile duale fezabile (matricea redusă rămâne nenegativă). La final, zerourile selectate exprimă complementaritatea: $c_{ij} = u_i + v_j$ pe muchiile cuplajului, deci costul primal este egal cu valoarea duală.

Variante.

- *Maximizare* (de exemplu, a profitului): înlocuim c_{ij} cu $M - c_{ij}$, unde $M = \max c_{ij}$, și minimizăm.
- *Matrice nepătrată* (m agenți, n sarcini, $m < n$): adăugăm $n - m$ agenți fictivi cu costuri 0. Sarcinile primite de aceștia rămân neefectuate.
- *Atribuiri interzise:* punem un cost foarte mare M pe pozițiile respective.

Un exemplu complet, în care este necesar și Pasul 4, este dat în Problema 21.

Probleme rezolvate

Problemele marcate cu ★ au chenarul portocaliu. Ele conțin o idee mai deosebită sau o aplicație mai surprinzătoare și pot fi tratate ca probleme de aprofundare.

Problema 1. Programarea unui turneu (round-robin)

Enunț. La un campionat participă 8 echipe. Fiecare joacă exact o dată cu fiecare.

a) Câte meciuri au loc?

b) Organizați meciurile în etape, astfel încât în fiecare etapă fiecare echipă să joace exact un meci. Câte etape sunt necesare?

c) Ce se schimbă pentru 7 echipe?

Rezolvare. Modelăm echipele ca vârfuri și meciurile ca muchii: obținem K_8.

a) Numărul de meciuri este $|E(K_8)| = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

b) O etapă este un cuplaj perfect (4 meciuri disjuncte). Fiecare echipă joacă 7 meciuri, deci sunt necesare cel puțin 7 etape. Cum $28/4 = 7$, trebuie descompus K_8 în 7 cuplaje perfecte (o *1-factorizare*).

Construcție (metoda cercului): fixăm echipa 8 și plasăm echipele $1, \ldots, 7$ pe un cerc. În etapa r ($r = 1, \ldots, 7$), echipa 8 joacă cu r, iar echipele $i \neq j$ din $\{1, \ldots, 7\}$ joacă între ele dacă $i + j \equiv 2r \pmod 7$.

Etapa	Meciuri
1	8–1, 2–7, 3–6, 4–5
2	8–2, 1–3, 4–7, 5–6
3	8–3, 2–4, 1–5, 6–7
4	8–4, 3–5, 2–6, 1–7
5	8–5, 4–6, 3–7, 1–2
6	8–6, 5–7, 1–4, 2–3
7	8–7, 1–6, 2–5, 3–4

Corectitudine: pentru o pereche $\{i, j\} \subseteq \{1, \ldots, 7\}$, congruența $2r \equiv i + j \pmod 7$ are soluție unică r, deoarece 2 este inversabil modulo 7. Deci fiecare meci apare exact o dată. Singura soluție cu $i = j$ a congruenței este $i = j = r$. Ea nu este un meci, iar echipa r joacă în acea etapă cu 8. Prin urmare fiecare echipă joacă exact o dată pe etapă.

c) Pentru 7 echipe adăugăm o echipă fictivă. Cine „joacă” cu ea stă în etapa respectivă. Rezultă 21 de meciuri în 7 etape, cu câte o echipă liberă pe etapă. În general, K_n are o 1-factorizare dacă și numai dacă n este par.

★ Problema 2. Clasamentul unui campionat (turnee și drumuri hamiltoniene)

Enunț. Într-un campionat cu 6 echipe, $A, \ldots, F$, fiecare echipă a jucat exact o dată cu fiecare, fără egaluri. Rezultatele sunt:

Echipa	A învins pe	Echipa	A învins pe
A	$B,\ D$	D	E
B	$C,\ D,\ F$	E	$A,\ B,\ C,\ F$
C	$A,\ D,\ F$	F	$A,\ D$

a) Arătați că echipele nu pot fi ordonate astfel încât fiecare echipă să le fi învins pe toate

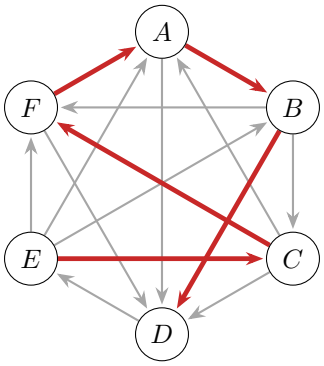
echipele aflate după ea în clasament.

b) Găsiți o ordonare a echipelor în care fiecare echipă a învins-o pe *următoarea*.

c) Demonstrați că o astfel de ordonare există în orice campionat fără egaluri (teorema lui Rédei).

d) Arătați că echipa cu cele mai multe victorii le-a învins pe toate celelalte echipe direct sau printr-un intermediar (a învins o echipă care, la rândul ei, a învins-o pe echipa respectivă). Este acest lucru adevărat în orice campionat?

Rezolvare. *Modelarea.* Echipele sunt vârfurile, iar fiecare meci este un arc de la învingător la învins. Între oricare două echipe există exact un arc, deci graful este un turneu, adică o orientare a lui K_6. Verificare: avem $2+3+3+1+4+2 = 15 = \binom{6}{2}$ arce.



În desen, arcul $u \to v$ înseamnă „u l-a învins pe v”. Arcele roșii formează ordonarea găsită la punctul b).

a) Echipele A, B, C formează un circuit: A l-a învins pe B, B pe C, iar C pe A. Într-un clasament „perfect”, echipa dintre ele aflată pe primul loc ar trebui să le fi învins pe celelalte două, dar fiecare dintre ele a pierdut cu una dintre celelalte. Deci un astfel de clasament nu există. Aceeași situație apare oricând turneul conține un circuit.

b) Construim ordonarea prin *inserare*: adăugăm echipele pe rând, păstrând proprietatea că fiecare echipă o învinge pe următoarea. Pentru a insera o echipă v în lanțul $p_1 \to p_2 \to \cdots \to p_k$:

- Dacă v l-a învins pe p_1, o punem la început.
- Altfel, dacă p_k l-a învins pe v, o punem la sfârșit.
- Altfel, căutăm două echipe consecutive $p_i \to p_{i+1}$, astfel încât p_i să-l fi învins pe v, iar v să-l fi învins pe p_{i+1}, și punem v între ele.

Inserăm	Motivul	Lanțul obținut
A	–	A
B	A l-a învins pe B: la sfârșit	$A \to B$
C	C l-a învins pe A: la început	$C \to A \to B$
D	B l-a învins pe D: la sfârșit	$C \to A \to B \to D$
E	E l-a învins pe C: la început	$E \to C \to A \to B \to D$
F	$C \to F$ și $F \to A$: între C și A	$E \to C \to F \to A \to B \to D$

La inserarea lui F: E l-a învins pe F, deci F nu poate fi primul, iar F l-a învins pe D, deci nu poate fi ultimul. Mergând de-a lungul lanțului, C l-a învins pe F, iar F l-a învins pe A, deci F

intră între C și A. Ordonarea găsită este

$$E \to C \to F \to A \to B \to D.$$

c) Demonstrăm prin inducție după numărul n de echipe că orice turneu are un drum hamiltonian orientat. Pentru $n = 1$ afirmația este evidentă. Presupunem afirmația adevărată pentru $n - 1$ echipe și considerăm un turneu cu n echipe. Alegem o echipă v. Conform ipotezei de inducție, celelalte $n - 1$ echipe formează un lanț $p_1 \to p_2 \to \cdots \to p_{n-1}$. Arătăm că v poate fi inserată:

- Dacă $v \to p_1$, lanțul $v \to p_1 \to \cdots \to p_{n-1}$ convine.
- Dacă $p_{n-1} \to v$, lanțul $p_1 \to \cdots \to p_{n-1} \to v$ convine.
- Altfel avem $p_1 \to v$ și $v \to p_{n-1}$. Fie i cel mai mare indice cu $p_i \to v$. Avem $i \leq n - 2$, deoarece $v \to p_{n-1}$. Din alegerea lui i, echipa p_{i+1} nu l-a învins pe v, deci $v \to p_{i+1}$. Lanțul $p_1 \to \cdots \to p_i \to v \to p_{i+1} \to \cdots \to p_{n-1}$ convine.

În toate cazurile obținem un drum hamiltonian orientat cu n echipe, ceea ce încheie inducția. Demonstrația este chiar procedeul de inserare folosit la punctul b).

d) Scorurile sunt: A: 2, B: 3, C: 3, D: 1, E: 4, F: 2. Echipa cu cele mai multe victorii este E. Ea le-a învins direct pe A, B, C, F, iar pe D (singura echipă care a învins-o) o „învinge” prin intermediar: $E \to A \to D$ (sau prin B, C ori F).

Afirmația este adevărată în orice campionat. Fie v o echipă cu scor maxim și u o echipă care l-a învins pe v. Presupunem, prin reducere la absurd, că nicio echipă învinsă de v nu l-a învins pe u. Atunci u le-a învins pe toate echipele învinse de v, și în plus l-a învins pe v. Scorul lui u ar fi cel puțin scorul lui v plus 1, contradicție cu maximalitatea. Deci există w cu $v \to w \to u$.

Observație. Echipa D, aflată pe ultimul loc în ordonarea de la b), a învins-o pe E, aflată pe primul loc. Lanțul se închide astfel într-un circuit care trece prin toate echipele: $E \to C \to F \to A \to B \to D \to E$. Pornind din orice punct al circuitului obținem o altă ordonare valabilă, deci în acest campionat *orice* echipă poate fi pusă pe primul loc. Un drum hamiltonian nu este, așadar, un clasament convingător, iar în practică se folosesc scorurile.

Problema 3. Rețea complet conectată de servere

Enunț. Un centru de date leagă serverele direct, fiecare cu fiecare (topologie *full mesh*).

a) Bugetul permite cel mult 50 de legături. Câte servere pot fi conectate astfel?

b) Câte legături pot cădea simultan, oricare ar fi ele, fără ca rețeaua să se deconecteze?

c) Comparați cu o rețea arbore.

Rezolvare. a) Cerem $\frac{n(n-1)}{2} \leq 50$. Pentru $n = 10$ avem 45 de legături, pentru $n = 11$ avem 55. Deci se pot conecta $n = 10$ servere.

b) Rețeaua este graful K_{10}: serverele sunt vârfurile, legăturile sunt muchiile. Căderea unor legături înseamnă eliminarea unei mulțimi F de muchii. Căutăm cel mai mare număr m cu proprietatea că, oricare ar fi mulțimea F cu $|F| \leq m$, graful rămas $K_{10} - F$ este încă conex (orice două servere pot comunica, eventual prin intermediari). Lucrăm întâi pentru K_n oarecare, apoi luăm $n = 10$.

Pasul 1: o margine superioară. Fie v un server oarecare. El are $n - 1$ legături, câte una cu fiecare dintre celelalte servere. Dacă toate aceste $n - 1$ legături cad, v nu mai este legat de nimeni, deci rețeaua se deconectează. Prin urmare $m \leq n - 2$: există o alegere nefavorabilă de $n - 1$ legături care rupe rețeaua.

Pasul 2: $n-2$ căderi nu deconectează niciodată rețeaua (argument cu drumuri). Fie $u \neq v$ două servere. Între ele există $n-1$ drumuri care nu au nicio muchie comună:

- Legătura directă $u\,v$.
- Pentru fiecare dintre celelalte $n-2$ servere w, drumul $u\,w\,v$ (format din muchiile uw și wv).

Două drumuri diferite nu au muchii comune: drumurile de forma $u\,w\,v$ diferă prin vârful intermediar w, deci și prin muchiile folosite, iar niciunul nu conține muchia uv. O legătură căzută poate distruge deci cel mult unul dintre aceste $n-1$ drumuri. Dacă cad cel mult $n-2$ legături, rămâne intact cel puțin un drum între u și v. Cum u și v au fost arbitrari, rețeaua rămâne conexă.

Pasul 2' (același rezultat, cu tăieturi). Pentru $S \subseteq V$, cu $S \neq \emptyset$ și $S \neq V$, numim *tăietură* mulțimea $E(S, V \setminus S)$ a muchiilor cu un capăt în S și celălalt în $V \setminus S$. Graful $K_n - F$ este neconex dacă și numai dacă există o astfel de mulțime S cu $E(S, V \setminus S) \subseteq F$. (Dacă graful e neconex, luăm S o componentă conexă. Reciproc, dacă toate muchiile dintre S și complementul său au căzut, nu mai există drum de la S în afara lui.) În K_n orice vârf din S e legat de orice vârf din afara lui S, deci, pentru $|S| = k$,

$$|E(S, V \setminus S)| = k(n-k), \qquad k(n-k) - (n-1) = (k-1)(n-k-1) \;\geq\; 0 \quad \text{pentru } 1 \leq k \leq n-1.$$

Așadar orice tăietură are cel puțin $n-1$ muchii, cu egalitate doar pentru $k = 1$ sau $k = n-1$, adică atunci când un singur server este separat de celelalte. Ca graful să se deconecteze, F trebuie să conțină o tăietură întreagă, deci $|F| \geq n-1$.

Concluzie. Numărul maxim de legături care pot cădea, oricare ar fi ele, fără a deconecta rețeaua este $m = n-2$. Cu alte cuvinte, conexitatea pe muchii a lui K_n (numărul minim de muchii a căror eliminare deconectează graful) este $\lambda(K_n) = n-1$.

Pentru $n = 10$ mărimile tăieturilor sunt:

Servere separate $k = \lvert S \rvert$	1	2	3	4	5
Legături care trebuie să cadă, $k(10-k)$	9	16	21	24	25

(cazurile $k = 6, \ldots, 9$ coincid cu $k = 4, \ldots, 1$, prin înlocuirea lui S cu complementul). Deci pot cădea **oricare 8 legături** fără ca rețeaua să se deconecteze. Cu 9 căderi, rețeaua se poate deconecta numai într-un fel: dacă cad toate cele 9 legături ale aceluiași server, care rămâne izolat. Pentru a rupe rețeaua în două grupuri de câte cel puțin două servere trebuie să cadă cel puțin 16 legături, iar pentru două grupuri de câte 5, cel puțin 25.

c) Un *arbore* este un graf conex fără cicluri. O rețea arbore este deci o rețea în care orice două servere pot comunica, dar fără legături „redundante".

Afirmație: un arbore cu n vârfuri are exact $n-1$ muchii.

Lema (existența frunzelor). Orice arbore cu $n \geq 2$ vârfuri are un vârf de grad 1 (o *frunză*). Într-adevăr, fie $P = x_0 x_1 \ldots x_\ell$ un drum de lungime maximă în arbore. Cum arborele e conex și are cel puțin două vârfuri, $\ell \geq 1$. Vârful x_0 e vecin cu x_1. Dacă x_0 ar avea un alt vecin y, atunci:

- Dacă y nu se află pe P, atunci $y\,x_0 x_1 \ldots x_\ell$ ar fi un drum mai lung decât P, contradicție cu maximalitatea.
- Dacă $y = x_i$ cu $i \geq 2$, atunci $x_0 x_1 \ldots x_i x_0$ ar fi un ciclu, contradicție cu faptul că arborele nu are cicluri.

Deci x_0 are gradul 1.

Pentru $n = 10$, o rețea arbore are deci 9 legături. Aceasta este și cea mai ieftină rețea conexă posibilă: dintr-un graf conex putem elimina, cât timp există un ciclu, câte o muchie a unui ciclu fără a pierde conexitatea (capetele ei rămân legate prin restul ciclului). La final obținem un arbore cu aceleași vârfuri, deci orice graf conex cu n vârfuri are cel puțin $n - 1$ muchii.

Fiabilitatea. Într-un arbore, căderea oricărei legături uv deconectează rețeaua: dacă u și v ar rămâne legate printr-un drum fără muchia uv, acel drum împreună cu uv ar forma un ciclu în arbore. Deci $\lambda = 1$, față de $\lambda = 9$ pentru K_{10}.

Comparația. Topologia completă costă 45 de legături, rezistă la orice 8 căderi și are diametrul 1 (orice două servere comunică direct). Arborele costă doar 9 legături, dar nu rezistă nici la o singură cădere, iar distanța dintre două servere poate ajunge la 9 legături, adică 8 servere intermediare (de exemplu, când arborele este un drum).

★ Problema 4. Cunoștințe și străini ($R(3,3) = 6$)

Enunț. Într-un grup de persoane, oricare două fie se cunosc, fie nu se cunosc.

a) Arătați că în orice grup de 6 persoane există 3 care se cunosc reciproc sau 3 care nu se cunosc reciproc.

b) Arătați că afirmația este falsă pentru 5 persoane.

Aplicație: legăturile dintre 6 stații de comunicații folosesc una din două frecvențe. Există mereu 3 stații legate între ele pe aceeași frecvență.

Rezolvare. *Modelarea.* Reprezentăm persoanele prin vârfuri. Cum oricare două persoane fie se cunosc, fie nu, fiecare pereche de vârfuri este legată printr-o muchie, deci lucrăm în graful complet K_n (aici $n = 6$, respectiv $n = 5$). Colorăm fiecare muchie:

- Cu *roșu*, dacă cele două persoane se cunosc.
- Cu *albastru*, dacă nu se cunosc.

Trei persoane care se cunosc reciproc corespund unui triunghi cu toate cele trei laturi roșii, iar trei persoane care nu se cunosc reciproc unui triunghi cu toate laturile albastre. Un triunghi cu toate laturile de aceeași culoare se numește *monocromatic*. Cerința a) devine: *orice colorare a muchiilor lui K_6 cu două culori conține un triunghi monocromatic*. Cerința b): *există o colorare a muchiilor lui K_5 cu două culori fără triunghi monocromatic*.

Notația $R(3,3)$. Pentru numere naturale $s, t \geq 2$, *numărul Ramsey* $R(s,t)$ este cel mai mic număr natural n cu proprietatea că, oricum am colora muchiile lui K_n cu roșu și albastru, există s vârfuri unite între ele numai prin muchii roșii sau t vârfuri unite între ele numai prin muchii albastre. În limbajul problemei: $R(s,t)$ este numărul minim de persoane care garantează existența a s cunoștințe reciproce sau a t străini reciproci. Teorema lui Ramsey (1930) afirmă că acest număr există (este finit) pentru orice s, t.

Proprietatea este „monotonă”: dacă are loc pentru n persoane, are loc pentru orice grup mai mare, fiindcă putem aplica rezultatul oricăror n persoane din grup. De aceea, pentru a arăta că $R(3,3) = 6$ trebuie demonstrate exact două lucruri:

- $R(3,3) \leq 6$: pentru $n = 6$ proprietatea are loc mereu (cerința a).
- $R(3,3) > 5$: pentru $n = 5$ există o situație în care nu are loc (cerința b).

a) Considerăm o colorare oarecare a celor 15 muchii ale lui K_6 și fixăm un vârf v. Din v pleacă 5 muchii, către celelalte 5 vârfuri, fiecare roșie sau albastră. Dacă ar fi cel mult 2 muchii roșii și

cel mult 2 albastre, ar fi în total cel mult 4 muchii, contradicție. Deci cel puțin 3 dintre aceste muchii au aceeași culoare (principiul cutiei). Deoarece cele două culori joacă roluri simetrice, putem presupune că această culoare este roșu și notăm vx, vy, vz trei muchii roșii. Privim acum cele trei muchii dintre x, y, z:

- Dacă măcar una dintre ele este roșie, de exemplu xy, atunci triunghiul vxy are toate laturile roșii (vx, vy și xy).
- Dacă niciuna nu este roșie, atunci xy, yz, xz sunt toate albastre, deci triunghiul xyz este albastru.

În ambele cazuri există un triunghi monocromatic, deci 3 persoane care se cunosc reciproc sau 3 care nu se cunosc reciproc. Cum colorarea a fost arbitrară, $R(3,3) \leq 6$.

b) Așezăm cele 5 persoane, numerotate $1, \ldots, 5$, în jurul unei mese și presupunem că fiecare își cunoaște doar cei doi vecini. Muchiile roșii sunt atunci

$$12,\ 23,\ 34,\ 45,\ 51,$$

adică ciclul 1–2–3–4–5–1, iar muchiile albastre sunt cele 5 „diagonale”

$$13,\ 35,\ 52,\ 24,\ 41,$$

care formează ciclul 1–3–5–2–4–1. Așadar fiecare clasă de culoare este un ciclu cu 5 vârfuri, C_5.

Un ciclu C_5 nu conține triunghiuri: un triunghi ar cere trei vârfuri vecine două câte două în ciclu, dar cei doi vecini ai unui vârf nu sunt vecini între ei (de exemplu, în ciclul roșu vecinii lui 1 sunt 2 și 5, iar 25 nu este muchie roșie). Prin urmare nu există triunghi roșu și nici triunghi albastru. În limbajul problemei: oricare trei persoane conțin două care nu se cunosc și două care se cunosc. Deci $R(3,3) > 5$.

Din a) și b) rezultă $R(3,3) = 6$.

Aplicația. Pentru cele 6 stații înlocuim „se cunosc” cu „legătura folosește prima frecvență” și „nu se cunosc” cu „legătura folosește a doua frecvență”. Raționamentul de la a) arată că există 3 stații legate între ele pe aceeași frecvență, iar exemplul de la b) arată că pentru 5 stații acest lucru nu mai este garantat.

Observație. Numerele Ramsey cresc foarte repede și sunt greu de calculat: se știe că $R(3,4) = 9$ și $R(4,4) = 18$, însă valoarea exactă a lui $R(5,5)$ nu este cunoscută.

Problema 5. Problema comis-voiajorului pe K_5

Enunț. Un agent pornește din orașul A, vizitează B, C, D, E câte o dată și revine în A. Distanțele (km) sunt date în tabel.

	A	B	C	D	E
A	–	12	10	19	8
B	12	–	3	7	2
C	10	3	–	6	20
D	19	7	6	–	4
E	8	2	20	4	–

a) Câte trasee distincte există?

b) Găsiți traseul cel mai scurt.

c) Comparați cu euristica „cel mai apropiat vecin”.

Rezolvare. Modelăm orașele ca vârfurile lui K_5, iar fiecare drum direct dintre două orașe ca o muchie ponderată cu distanța. Un traseu care pleacă din A, trece o singură dată prin fiecare dintre celelalte orașe și revine în A este un *ciclu hamiltonian* în K_5 (un ciclu care trece exact o dată prin fiecare vârf).

a) *Numărarea traseelor.* Un traseu se scrie ca o succesiune

$$A,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ A,$$

unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt orașele B, C, D, E într-o anumită ordine. Prima oprire x_1 se poate alege în 4 moduri, a doua în 3, a treia în 2, iar ultima este determinată: în total $4! = 24$ succesiuni.

Distanțele sunt simetrice ($d(X,Y) = d(Y,X)$), deci succesiunea parcursă invers,

$$A,\ x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1,\ A,$$

folosește exact aceleași drumuri și are aceeași lungime: este același ciclu, parcurs în sens opus. De exemplu, $A\,B\,C\,D\,E\,A$ și $A\,E\,D\,C\,B\,A$ reprezintă același traseu. O succesiune nu coincide cu inversa ei, pentru că $x_1 \neq x_4$. Prin urmare cele 24 de succesiuni se grupează în perechi (succesiune, inversă), fiecare pereche dând un singur traseu, deci există $24/2 = 12$ trasee distincte.

În general, pentru $n \geq 3$ orașe, fixăm orașul de plecare, ordonăm celelalte $n-1$ în $(n-1)!$ moduri și împărțim la 2 pentru sensul de parcurgere: K_n are $\frac{(n-1)!}{2}$ cicluri hamiltoniene.

b) *Alegerea traseelor de enumerat.* Ca să listăm fiecare traseu o singură dată, păstrăm din fiecare pereche (succesiune, inversă) un singur reprezentant. Regula: păstrăm succesiunea în care prima oprire x_1 precede alfabetic ultima oprire x_4. Cum la inversare x_1 și x_4 își schimbă locurile, exact una dintre cele două succesiuni respectă regula. (În exemplul de mai sus păstrăm $A\,B\,C\,D\,E\,A$, unde B precede E, și renunțăm la $A\,E\,D\,C\,B\,A$.)

Enumerarea se face sistematic:

1. Alegem perechea (prima oprire, ultima oprire) $= (x_1, x_4)$ cu x_1 înaintea lui x_4 în alfabet: (B,C), (B,D), (B,E), (C,D), (C,E), (D,E), adică $\binom{4}{2} = 6$ perechi.
2. Cele două orașe rămase se vizitează la mijloc, în una dintre cele 2 ordini posibile.

Se obțin $6 \cdot 2 = 12$ trasee: 6 care încep cu B, 4 care încep cu C și 2 care încep cu D (niciunul nu începe cu E, fiindcă E este ultimul în alfabet). Pentru fiecare traseu adunăm cele 5 distanțe din tabel. De exemplu,

$$A\,C\,B\,D\,E\,A: \quad d(A,C)+d(C,B)+d(B,D)+d(D,E)+d(E,A) = 10+3+7+4+8 = 32.$$

Rezultatele, în ordinea enumerării (pe coloane):

Traseu	km	Traseu	km
$A\,B\,C\,D\,E\,A$	33	$A\,C\,B\,D\,E\,A$	**32**
$A\,B\,C\,E\,D\,A$	58	$A\,C\,B\,E\,D\,A$	38
$A\,B\,D\,C\,E\,A$	53	$A\,C\,D\,B\,E\,A$	33
$A\,B\,D\,E\,C\,A$	53	$A\,C\,E\,B\,D\,A$	58
$A\,B\,E\,C\,D\,A$	59	$A\,D\,B\,C\,E\,A$	57
$A\,B\,E\,D\,C\,A$	34	$A\,D\,C\,B\,E\,A$	38

Optimul este $A \to C \to B \to D \to E \to A$, de lungime $10+3+7+4+8 = 32$ km.

c) Cel mai apropiat vecin din A: E (8), apoi B (2), C (3), D (6), înapoi la A (19): total 38 km, cu 6 km peste optim. Euristica este rapidă, dar nu garantează optimul. Căutarea exhaustivă devine repede impracticabilă: pentru $n = 20$ orașe există $19!/2 \approx 6 \cdot 10^{16}$ trasee.

★ Problema 6. Așezarea la masă rotundă (descompunerea lui K_7 în cicluri hamiltoniene)

Enunț. 7 participanți la o conferință iau cina la o masă rotundă, 3 seri la rând. Organizați locurile astfel încât oricare doi participanți să stea alături exact o dată.

Rezolvare. *Modelarea.* Participanții sunt vârfurile lui K_7. La o masă rotundă fiecare persoană are exact doi vecini, iar cele 7 perechi de vecini dintr-o seară formează un ciclu care trece o dată prin fiecare participant, adică un *ciclu hamiltonian* în K_7. De exemplu, ordinea $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ în jurul mesei dă perechile de vecini $12, 23, 34, 45, 56, 67, 71$. Așadar „doi participanți stau alături într-o seară” înseamnă „muchia lor aparține ciclului din acea seară”.

De ce sunt necesare exact 3 seri. Fiecare participant trebuie să stea alături de ceilalți 6, iar într-o seară are 2 vecini, deci are nevoie de $6/2 = 3$ seri. Numărând perechile: K_7 are $\binom{7}{2} = 21$ muchii, iar fiecare seară „consumă” 7 dintre ele, deci $21/7 = 3$. Cerința „oricare doi stau alături exact o dată” înseamnă că cele 3 cicluri nu au muchii comune și împreună conțin toate muchiile lui K_7: căutăm o *descompunere a lui K_7 în 3 cicluri hamiltoniene.*

Construcția lui Walecki. Participantul 7 joacă rolul de „centru”, iar participanții $1, \ldots, 6$ se gândesc așezați în vârfurile unui hexagon regulat, în această ordine. Pentru doi participanți $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$ numim *distanța lor pe hexagon* numărul minim de pași de-a lungul hexagonului de la unul la celălalt. Ea este 1, 2 sau 3. Există:

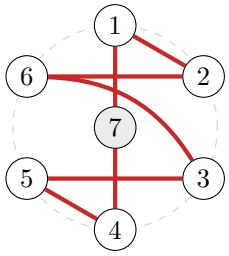
- 6 perechi la distanța 1: $12, 23, 34, 45, 56, 61$.
- 6 perechi la distanța 2: $13, 24, 35, 46, 51, 62$.
- 3 perechi la distanța 3 (vârfuri opuse): $14, 25, 36$.

Împreună cu cele 6 perechi de forma $7i$, acestea sunt toate cele $6 + 6 + 3 + 6 = 21$ de perechi.

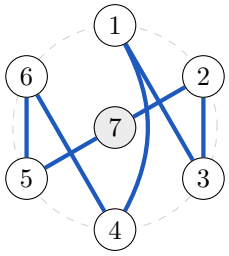
Pornim de la drumul „în zigzag” $1, 2, 6, 3, 5, 4$, care traversează hexagonul alternativ dintr-o parte în alta. Muchiile lui sunt

$$12 \text{ (dist. 1)}, \quad 26 \text{ (dist. 2)}, \quad 63 \text{ (dist. 3)}, \quad 35 \text{ (dist. 2)}, \quad 54 \text{ (dist. 1)},$$

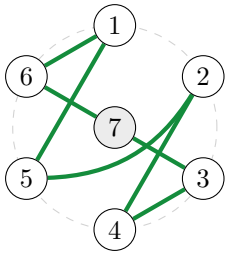
iar capetele 1 și 4 sunt vârfuri opuse. Închidem drumul prin centrul 7 și obținem ciclul hamiltonian al primei seri: $7, 1, 2, 6, 3, 5, 4$ (cu muchiile 71 și 47). Pentru serile următoare *rotim* hexagonul: adunăm 1 la fiecare număr din $\{1, \ldots, 6\}$ (cu convenția $6 + 1 = 1$), iar 7 rămâne pe loc.



Seara 1: 7, 1, 2, 6, 3, 5, 4

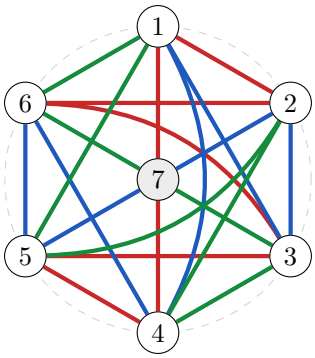


Seara 2: 7, 2, 3, 1, 4, 6, 5



Seara 3: 7, 3, 4, 2, 5, 1, 6

Suprapunând cele trei cicluri obținem toate cele 21 de muchii ale lui K_7, fiecare o singură dată:



K_7 = seara 1 $\cup$ seara 2 $\cup$ seara 3

În desene, participanții $1, \ldots, 6$ sunt vârfurile hexagonului, iar 7 este centrul. Culorile corespund serilor: roșu pentru seara 1, albastru pentru seara 2 și verde pentru seara 3. Muchiile dintre vârfuri opuse (36, 14, 25) sunt desenate curbat, ca să nu treacă prin centrul 7. Se vede că fiecare seară se obține din precedenta printr-o rotație a hexagonului cu 60°.

Seara	Ordinea la masă	Perechile de vecini
1	7, 1, 2, 6, 3, 5, 4	71, 12, 26, 36, 35, 45, 47
2	7, 2, 3, 1, 4, 6, 5	72, 23, 13, 14, 46, 56, 57
3	7, 3, 4, 2, 5, 1, 6	73, 34, 24, 25, 15, 16, 67

De ce nu se repetă nicio pereche. O rotație păstrează distanța pe hexagon, deci fiecare tip de pereche se tratează separat:

- *distanța 3:* drumul conține perechea opusă 36. Rotațiile dau 41 și 52. Apar toate cele 3 perechi opuse, câte o dată.
- *distanța 1:* drumul conține 12 și 45, adică perechile $\{i, i+1\}$ pentru $i = 1$ și $i = 4$. După rotații, i parcurge $\{1, 2, 3\}$, respectiv $\{4, 5, 6\}$, deci apar toate cele 6 perechi, câte o dată.
- *distanța 2:* drumul conține 62 și 35, adică perechile $\{i, i+2\}$ pentru $i = 6$ și $i = 3$. După rotații, i parcurge $\{6, 1, 2\}$, respectiv $\{3, 4, 5\}$: din nou toate cele 6 perechi, câte o dată.
- *perechile cu 7:* în fiecare seară 7 stă între capetele drumului, care sunt vârfuri opuse: $\{1, 4\}$, apoi $\{2, 5\}$, apoi $\{3, 6\}$. Deci 7 stă o dată lângă fiecare dintre ceilalți.

Fiecare dintre cele 21 de perechi apare deci exact o dată, ceea ce se poate verifica și direct în ultima coloană a tabelului.

Generalizare. Pentru $n = 2m + 1$ participanți, aceeași construcție (un centru, ceilalți $2m$ pe un poligon regulat, un drum în zigzag rotit de m ori) dă o descompunere a lui K_{2m+1} în m cicluri hamiltoniene, deci m seri. Pentru n par descompunerea nu există, deoarece fiecare vârf are gradul $n - 1$, impar, iar un ciclu folosește la fiecare vârf exact 2 muchii. Se poate însă descompune K_n fără un cuplaj perfect.

★ Problema 7. Jocul de domino în cerc (cicluri euleriene în K_7)

Enunț. Un set de domino conține câte o piesă pentru fiecare pereche de numere de la 0 la 6, inclusiv dublurile 0–0, 1–1, …, 6–6. Piesele se așază una după alta, iar două piese alăturate trebuie să aibă același număr pe capetele care se ating.

a) Câte piese are setul? Modelați problema așezării tuturor pieselor într-un cerc printr-un graf.

b) Demonstrați teorema lui Euler: un graf conex are un ciclu eulerian dacă și numai dacă toate gradele sunt pare. Deduceți forma ei pentru drumuri euleriene.

c) Arătați că toate piesele setului pot fi așezate într-un cerc și construiți o astfel de așezare, folosind ciclurile din Problema 6.

d) Se elimină din set piesele care conțin numărul 6. Se mai pot așeza cele 21 de piese rămase într-un cerc? Dar într-un singur șir?

Rezolvare. a) Piesele cu numere diferite corespund perechilor de numere din $\{0, \ldots, 6\}$, deci sunt $\binom{7}{2} = 21$, la care se adaugă cele 7 dubluri: în total 28 de piese.

Considerăm graful cu vârfurile $0, 1, \ldots, 6$, în care fiecare piesă a–b este o muchie între a și b. Piesele cu numere diferite formează graful complet K_7, iar fiecare dublură a–a este o buclă în vârful a. Un șir de piese care se potrivesc este un traseu în acest graf: piesa a–b urmată de piesa b–c înseamnă că mergem de la a la b și apoi de la b la c. Așezarea tuturor pieselor într-un cerc este deci un ciclu eulerian.

b) *Condiția este necesară.* Parcurgem ciclul eulerian. De fiecare dată când trecem printr-un vârf, intrăm pe o muchie și ieșim pe alta, deci folosim două muchii incidente cu el. Vârful de plecare este și cel de sosire, deci și acolo muchiile se folosesc în perechi (prima muchie a ciclului cu ultima). Cum fiecare muchie este folosită exact o dată, gradul fiecărui vârf este par. O buclă se parcurge intrând și ieșind din același vârf și adaugă 2 la grad, deci nu schimbă paritatea.

Condiția este suficientă. Fie G un graf conex în care toate gradele sunt pare.

- *Pasul 1: un traseu închis.* Pornim dintr-un vârf v și mergem pe muchii nefolosite cât timp se poate. Dacă am ajuns într-un vârf $w \neq v$, am intrat în w de o dată mai mult decât am ieșit, deci am folosit un număr impar de muchii din w. Cum gradul lui w este par, mai există o muchie nefolosită și putem continua. Prin urmare ne putem bloca doar în v, iar traseul obținut C este închis.
- *Pasul 2: lipirea traseelor.* Dacă C folosește toate muchiile, am terminat. Altfel, deoarece G este conex, există un vârf u al lui C incident cu o muchie nefolosită. În graful muchiilor nefolosite, toate gradele sunt tot pare (din fiecare vârf, C a folosit un număr par de muchii). Repetând Pasul 1 din u obținem un traseu închis C' format din muchii nefolosite. Îl „lipim” în C: parcurgem C până la u, apoi tot C', apoi restul lui C. Obținem un traseu închis mai lung.
- Repetăm Pasul 2. Numărul muchiilor este finit, deci la final obținem un ciclu eulerian.

Drumuri euleriene. Dacă un graf conex are exact două vârfuri de grad impar, x și y, adăugăm o muchie nouă xy. Acum toate gradele sunt pare, deci există un ciclu eulerian. Eliminând din el muchia nouă, obținem un drum eulerian de la x la y. Reciproc, într-un drum eulerian deschis, vârfurile interioare au grad par, iar cele două capete au grad impar (prima, respectiv ultima muchie nu are pereche). Prin urmare un graf cu mai mult de două vârfuri de grad impar nu are nici ciclu, nici drum eulerian.

c) În K_7 fiecare vârf are gradul 6. Bucla adaugă 2, deci fiecare vârf are gradul 8, număr par. Graful este conex, deci, conform punctului b), există un ciclu eulerian: toate piesele pot fi așezate în cerc.

Construcția. În Problema 6 am descompus K_7 (cu vârfurile $1, \ldots, 7$) în trei cicluri hamiltoniene.

Notăm vârful 7 cu 0, ca să obținem numerele de pe piese:

$$0,1,2,6,3,5,4,0, \qquad 0,2,3,1,4,6,5,0, \qquad 0,3,4,2,5,1,6,0.$$

Toate trei trec prin vârful 0, deci le putem parcurge unul după altul, obținând un traseu închis care folosește o dată fiecare dintre cele 21 de muchii ale lui K_7. Mai rămân dublurile: inserăm fiecare dublură a–a prima dată când traseul ajunge în a. Obținem cercul de 28 de piese:

$$\begin{gathered}0\text{–}0,\ 0\text{–}1,\ 1\text{–}1,\ 1\text{–}2,\ 2\text{–}2,\ 2\text{–}6,\ 6\text{–}6,\ 6\text{–}3,\ 3\text{–}3,\ 3\text{–}5,\ 5\text{–}5,\ 5\text{–}4,\ 4\text{–}4,\ 4\text{–}0,\\ 0\text{–}2,\ 2\text{–}3,\ 3\text{–}1,\ 1\text{–}4,\ 4\text{–}6,\ 6\text{–}5,\ 5\text{–}0,\ 0\text{–}3,\ 3\text{–}4,\ 4\text{–}2,\ 2\text{–}5,\ 5\text{–}1,\ 1\text{–}6,\ 6\text{–}0.\end{gathered}$$

Fiecare piesă începe cu numărul cu care se termină precedenta, iar ultima piesă, 6–0, se leagă de prima, 0–0. Apar toate cele 28 de piese, câte o dată.

d) Fără numărul 6 rămân piesele cu numere de la 0 la 5: graful complet K_6 și 6 bucle. În K_6 fiecare vârf are gradul 5, iar cu bucla gradul devine 7, impar. Toate cele 6 vârfuri au grad impar, deci, conform punctului b), nu există nici ciclu eulerian, nici drum eulerian. Piesele nu pot fi așezate nici în cerc, nici într-un singur șir.

Explicație intuitivă: într-un șir, fiecare apariție a unui număr în interiorul șirului folosește două capete de piese. Numărul 0 apare pe 7 capete de piese (o dată pe fiecare dintre 0–$1,\ldots,0$–5 și de două ori pe 0–0), un număr impar. Deci 0 trebuie să fie la un capăt al șirului. La fel pentru fiecare dintre cele 6 numere, dar un șir are doar două capete.

Problema 8. Depozitarea substanțelor incompatibile

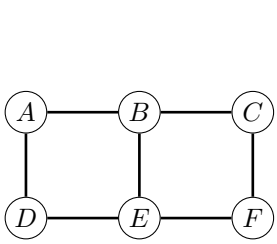
Enunț. Un laborator are 6 substanțe $A,\ldots,F$. Perechile incompatibile (care nu pot sta în același depozit) sunt: AB, AD, BC, BE, CF, DE, EF.

a) Se pot împărți substanțele în două depozite?

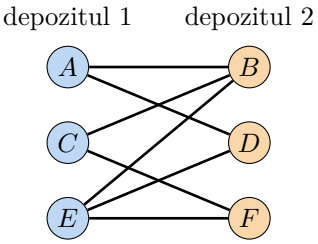
b) Ce se întâmplă dacă apare și incompatibilitatea AC?

Rezolvare. Graful incompatibilităților trebuie colorat corect cu 2 culori, adică trebuie să fie bipartit.

a) Colorăm prin parcurgere în lățime (BFS) din A: $A \mapsto 1$. Vecinii $B, D \mapsto 2$. Vecinii lui B: $C, E \mapsto 1$. Vecinul lui C: $F \mapsto 2$. Toate muchiile AB, AD, BC, BE, CF, DE, EF au capete de culori diferite. Deci depozitul 1 conține $\{A, C, E\}$, iar depozitul 2 conține $\{B, D, F\}$.



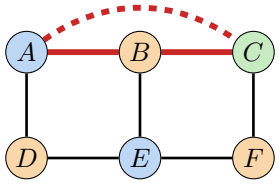
graful incompatibilităților



aceeași rețea, rearanjată

În stânga, graful incompatibilităților: vârfurile sunt substanțele, iar muchiile sunt perechile incompatibile. În dreapta, aceleași vârfuri și muchii, cu $\{A, C, E\}$ într-o coloană și $\{B, D, F\}$ în cealaltă: toate muchiile merg de la o coloană la cealaltă, deci graful este bipartit.

b) Cu AC apare triunghiul ABC, un ciclu impar, deci graful nu mai este bipartit și două depozite nu ajung. Trei ajung: $\{A, E\}$, $\{B, D, F\}$, $\{C\}$ este o colorare corectă (se verifică pe toate cele 8 muchii).



cu incompatibilitatea AC

Muchia nouă AC (punctată) închide împreună cu AB și BC triunghiul ABC (îngroșat). Culorile vârfurilor dau repartizarea în trei depozite: $\{A, E\}$, $\{B, D, F\}$, $\{C\}$.

Observație: BFS fie produce o 2-colorare, fie găsește o muchie între vârfuri de aceeași culoare, care închide un ciclu impar. Algoritmul rulează în timp $O(|V| + |E|)$.

Problema 9. Repartizarea voluntarilor (teorema lui Hall)

Enunț. Cinci voluntari $V_1, \ldots, V_5$ trebuie repartizați pe cinci posturi $P_1, \ldots, P_5$, câte unul pe post, fiecare doar pe posturi pentru care e calificat:

Voluntar	Posturi acceptate
V_1	P_1, P_2
V_2	P_1
V_3	P_2, P_3, P_4
V_4	P_1, P_2
V_5	P_4, P_5

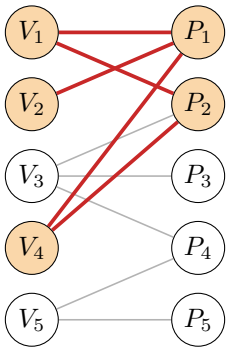
a) Există o repartizare completă?

b) Câte posturi pot fi ocupate cel mult?

c) Ce calificare suplimentară ar rezolva problema?

Rezolvare. Graful bipartit are părțile $\{V_1, \ldots, V_5\}$ și $\{P_1, \ldots, P_5\}$. Căutăm un cuplaj maxim.

a) Pentru $S = \{V_1, V_2, V_4\}$ avem $N(S) = \{P_1, P_2\}$, deci $|N(S)| = 2 < 3 = |S|$. Condiția lui Hall este încălcată, deci nu există repartizare completă.



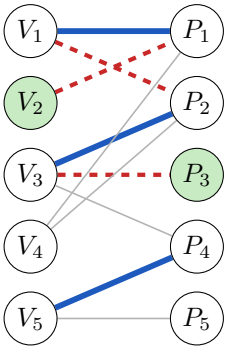
$S = \{V_1, V_2, V_4\}$ și $N(S) = \{P_1, P_2\}$

Voluntarii din S (colorați) au muchii, desenate cu roșu, doar către cele două posturi colorate din $N(S)$: trei voluntari pentru două posturi.

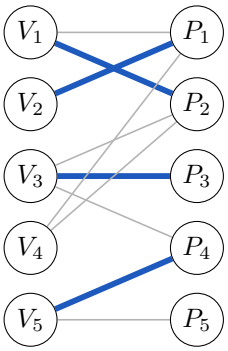
b) Pornim greedy: V_1P_1, V_3P_2, V_5P_4. Pentru V_2 căutăm un drum augmentant, care alternează muchii din afara cuplajului cu muchii din cuplaj:

$V_2 - P_1$ (liberă), $P_1 - V_1$ (în cuplaj), $V_1 - P_2$ (liberă), $P_2 - V_3$ (în cuplaj), $V_3 - P_3$ (liberă),

cu P_3 neocupat. Inversând rolurile muchiilor de pe drum obținem cuplajul V_2P_1, V_1P_2, V_3P_3, V_5P_4, deci 4 posturi ocupate. Mai mult nu se poate: cei trei voluntari din S au doar două posturi disponibile, deci cel puțin unul rămâne nerepartizat (forma cu deficiență a teoremei lui Hall).



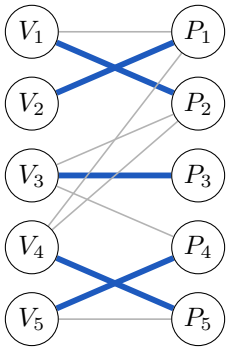
cuplajul greedy (albastru) și drumul augmentant



cuplajul după inversare (4 muchii)

În stânga, muchiile cuplajului greedy sunt albastre îngroșate, iar muchiile libere ale drumului augmentant sunt roșii punctate. Capetele drumului, V_2 și P_3 (verzi), nu sunt saturate. Drumul $V_2P_1V_1P_2V_3P_3$ alternează roșu–albastru. În dreapta, după inversare, muchiile roșii intră în cuplaj, iar cele albastre de pe drum ies: cuplajul are o muchie în plus, iar V_4 și P_5 rămân nesaturați.

c) Dacă V_4 se califică și pentru P_5, cuplajul V_1P_2, V_2P_1, V_3P_3, V_4P_5, V_5P_4 este perfect.



cuplaj perfect, cu muchia nouă V_4P_5

Problema 10. Alocarea curierilor (algoritmul ungar)

Enunț. Patru curieri trebuie alocați la patru zone de livrare, câte unul pe zonă. Timpii estimați (minute) sunt:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
C_1	9	2	7	8
C_2	6	4	3	7
C_3	5	8	1	8
C_4	7	6	9	4

Minimizați timpul total.

Rezolvare. *Modelarea.* Curierii $C_1, \ldots, C_4$ și zonele $Z_1, \ldots, Z_4$ sunt părțile grafului bipartit complet $K_{4,4}$. Muchia C_iZ_j are ponderea c_{ij}, timpul din tabel. O alocare (fiecare curier la o zonă diferită) este un cuplaj perfect, adică o permutare σ, cu timpul total $C(\sigma) = \sum_i c_{i\sigma(i)}$. Căutăm cuplajul perfect de pondere minimă. Există $4! = 24$ alocări. În loc să le enumerăm, aplicăm algoritmul ungar. Matricea costurilor este

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad (\text{rânduri } C_1, \ldots, C_4, \text{ coloane } Z_1, \ldots, Z_4).$$

Pasul 1: reducerea pe linii. Determinăm minimul fiecărei linii:

$$u_1 = \min(9,2,7,8) = 2, \quad u_2 = \min(6,4,3,7) = 3,$$
$$u_3 = \min(5,8,1,8) = 1, \quad u_4 = \min(7,6,9,4) = 4,$$

și îl scădem din toate elementele liniei respective. De exemplu, linia 1 devine $(9-2,\ 2-2,\ 7-2,\ 8-2) = (7,0,5,6)$. Obținem

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Interpretare: am scăzut din timpul fiecărui curier timpul minim pe care îl are oricum de parcurs. După faptul (i), alocarea optimă rămâne aceeași, iar orice alocare costă acum cu $2+3+1+4 = 10$ minute mai puțin.

Pasul 2: reducerea pe coloane. În matricea obținută, minimele coloanelor sunt

$$v_1 = \min(7,3,4,3) = 3, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 0, \qquad v_4 = 0,$$

deoarece coloanele 2, 3, 4 conțin deja câte un zero. Scădem 3 din coloana Z_1:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toate elementele sunt nenegative și fiecare linie și coloană conține cel puțin un zero. Suma constantelor scăzute până acum este

$$\sum_i u_i + \sum_j v_j = (2+3+1+4) + (3+0+0+0) = 13,$$

deci, după faptul (i), orice alocare are în matricea redusă costul $C(\sigma) - 13 \geq 0$. Așadar *orice alocare durează cel puțin 13 minute.*

Pasul 3: testul de optimalitate. Zerourile matricei reduse se află pe pozițiile

$$(1,2),\quad (2,1),\quad (2,3),\quad (3,3),\quad (4,1),\quad (4,4).$$

Zerourile $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,3)$, $(4,4)$ sunt independente (linii diferite și coloane diferite). Cum o linie acoperă cel mult unul dintre ele, sunt necesare cel puțin 4 linii pentru acoperirea tuturor zerourilor, deci $k = 4 = n$. Testul este trecut, iar Pasul 4 (modificarea matricei) nu mai este necesar.

Pasul 5: citirea atribuirii. Alegem zerourile independente, începând cu liniile care au un singur zero:

- Linia 1 are un singur zero, în coloana 2: alegem $C_1 \to Z_2$ și eliminăm linia 1 și coloana 2.
- Linia 3 are un singur zero, în coloana 3: alegem $C_3 \to Z_3$ și eliminăm linia 3 și coloana 3.
- În linia 2 au rămas zerouri doar în coloana 1 (cel din coloana 3 a fost eliminat): alegem $C_2 \to Z_1$ și eliminăm coloana 1.
- În linia 4 rămâne zeroul din coloana 4: alegem $C_4 \to Z_4$.

Zerourile alese sunt îngroșate:

$$\begin{pmatrix} 4 & \mathbf{0} & 5 & 6 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & \mathbf{0} & 7 \\ 0 & 2 & 5 & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Costul și optimalitatea. Calculăm costul în matricea *inițială*:

$$c_{12} + c_{21} + c_{33} + c_{44} = 2 + 6 + 1 + 4 = 13 \text{ minute}.$$

Valoarea coincide cu marginea inferioară de 13 minute obținută la Pasul 2, deci alocarea $C_1 \to Z_2$, $C_2 \to Z_1$, $C_3 \to Z_3$, $C_4 \to Z_4$ este optimă. Verificare duală: pe muchiile alese avem $c_{ij} = u_i + v_j$, adică $2 = 2 + 0$, $6 = 3 + 3$, $1 = 1 + 0$, $4 = 4 + 0$.

Observație (unicitate). O alocare optimă costă 13, deci are costul 0 în matricea redusă, adică folosește numai zerouri. Liniile 1 și 3 au câte un singur zero, ceea ce forțează $C_1 \to Z_2$ și $C_3 \to Z_3$, apoi $C_2 \to Z_1$ și $C_4 \to Z_4$. Prin urmare alocarea optimă este unică. Următoarea cea mai bună alocare durează 14 minute.

★ Problema 11. Locuri de practică (cuplaje stabile, algoritmul Gale–Shapley)

Enunț. Patru studenți, $S_1, \ldots, S_4$, trebuie repartizați la patru firme, $F_1, \ldots, F_4$, câte unul la fiecare firmă. Fiecare student și fiecare firmă au o listă de preferințe (de la cea mai dorită la cea mai puțin dorită):

Student	Preferințe	Firmă	Preferințe
S_1	$F_3,\ F_2,\ F_1,\ F_4$	F_1	$S_4,\ S_1,\ S_2,\ S_3$
S_2	$F_4,\ F_3,\ F_1,\ F_2$	F_2	$S_2,\ S_4,\ S_1,\ S_3$
S_3	$F_1,\ F_3,\ F_4,\ F_2$	F_3	$S_1,\ S_3,\ S_4,\ S_2$
S_4	$F_4,\ F_3,\ F_2,\ F_1$	F_4	$S_3,\ S_4,\ S_2,\ S_1$

a) Arătați că repartizarea S_1F_1, S_2F_2, S_3F_3, S_4F_4 este instabilă.

b) Aplicați algoritmul cererilor, în care studenții fac cereri, și verificați că repartizarea

obținută este stabilă.

c) Demonstrați că algoritmul se termină întotdeauna cu un cuplaj perfect stabil.

d) Aplicați algoritmul în care firmele fac cererile. Comparați cele două rezultate.

Rezolvare. *Modelarea.* Studenții și firmele sunt cele două părți ale grafului bipartit complet $K_{4,4}$, iar o repartizare este un cuplaj perfect. Spre deosebire de problema de atribuire, nu avem costuri, ci preferințe de ambele părți. Cerința naturală este *stabilitatea*: să nu existe un student și o firmă care s-ar înțelege să „rupă" repartizarea, deoarece amândoi s-ar prefera reciproc partenerilor primiți.

a) Studentul S_1 a primit F_1, a treia lui opțiune, dar o preferă pe F_3. Firma F_3 l-a primit pe S_3, a doua ei opțiune, dar îl preferă pe S_1. Perechea (S_1, F_3) este blocantă, deci repartizarea este instabilă.

b) *Algoritmul cererilor* (studenții fac cereri):

- Inițial nimeni nu este repartizat.
- Cât timp există un student liber, acesta face o cerere primei firme din lista lui la care nu a mai făcut cerere.
- Dacă firma este liberă, acceptă provizoriu. Dacă are deja un student, îl păstrează pe cel pe care îl preferă dintre cei doi, iar celălalt devine liber.

Facem cererile în ordinea indicilor: de fiecare dată cere studentul liber cu indicele cel mai mic.

Pas	Cerere	Decizia firmei	Repartizare provizorie
1	$S_1 \to F_3$	acceptă (liberă)	S_1F_3
2	$S_2 \to F_4$	acceptă (liberă)	$S_1F_3,\ S_2F_4$
3	$S_3 \to F_1$	acceptă (liberă)	$S_1F_3,\ S_2F_4,\ S_3F_1$
4	$S_4 \to F_4$	F_4 îl preferă pe S_4 lui S_2	$S_1F_3,\ S_3F_1,\ S_4F_4$
5	$S_2 \to F_3$	F_3 îl preferă pe S_1: refuză	neschimbată
6	$S_2 \to F_1$	F_1 îl preferă pe S_2 lui S_3	$S_1F_3,\ S_2F_1,\ S_4F_4$
7	$S_3 \to F_3$	F_3 îl preferă pe S_1: refuză	neschimbată
8	$S_3 \to F_4$	F_4 îl preferă pe S_3 lui S_4	$S_1F_3,\ S_2F_1,\ S_3F_4$
9	$S_4 \to F_3$	F_3 îl preferă pe S_1: refuză	neschimbată
10	$S_4 \to F_2$	acceptă (liberă)	$S_1F_3,\ S_2F_1,\ S_3F_4,\ S_4F_2$

După 10 cereri toți studenții sunt repartizați:

$$S_1F_3, \qquad S_2F_1, \qquad S_3F_4, \qquad S_4F_2.$$

Verificarea stabilității. O pereche blocantă ar fi formată dintr-un student și o firmă pe care el o preferă celei primite. Le verificăm pe toate:

- S_1 a primit prima opțiune, deci nu face parte din nicio pereche blocantă.
- S_2 (a primit F_1) preferă F_4 și F_3. Dar F_4 îl preferă pe S_3 (primit), iar F_3 îl preferă pe S_1 (primit).
- S_3 (a primit F_4) preferă F_1 și F_3. Dar F_1 îl preferă pe S_2, iar F_3 pe S_1.
- S_4 (a primit F_2) preferă F_4 și F_3. Dar F_4 îl preferă pe S_3, iar F_3 pe S_1.

Nu există perechi blocante, deci repartizarea este stabilă.

c) Demonstrăm trei proprietăți, valabile pentru orice n și orice liste de preferințe.

- *Algoritmul se termină.* Fiecare student face cel mult o cerere fiecărei firme, deci se fac cel mult n^2 cereri (aici, cel mult 16).
- *Rezultatul este un cuplaj perfect.* O firmă care a primit o cerere rămâne ocupată până la final: ea își schimbă studentul doar cu altul, mai bun. Presupunem că la final un student S a rămas liber. Atunci S a făcut cereri tuturor celor n firme, deci toate firmele sunt ocupate, cu n studenți diferiți de S. Dar există doar $n-1$ alți studenți, contradicție. Deci toți studenții, și astfel toate firmele, sunt repartizați.
- *Cuplajul este stabil.* Presupunem că S și F nu sunt repartizați împreună, dar S o preferă pe F firmei primite. Studenții fac cereri în ordinea preferințelor, deci S i-a făcut cerere lui F înainte de a ajunge la firma primită. Firma F l-a refuzat pe S, fie imediat, fie mai târziu, pentru un student pe care îl prefera. Studenții firmei F devin doar mai buni în timp, deci la final F are un student pe care îl preferă lui S. Așadar (S, F) nu este o pereche blocantă.

Aceasta demonstrează teorema lui Gale și Shapley: un cuplaj stabil există întotdeauna.

d) Acum firmele fac cererile, fiecare primului student din lista ei: $F_1 \to S_4$, $F_2 \to S_2$, $F_3 \to S_1$, $F_4 \to S_3$. Cele patru cereri merg la studenți diferiți, deci toate sunt acceptate și algoritmul se oprește imediat:

$$S_1F_3, \qquad S_2F_2, \qquad S_3F_4, \qquad S_4F_1.$$

Rezultatul este stabil, conform punctului c) aplicat cu rolurile inversate, dar diferă de cel de la b). Comparăm:

	Studenții fac cereri	Firmele fac cereri
S_2	F_1 (opțiunea 3)	F_2 (opțiunea 4)
S_4	F_2 (opțiunea 3)	F_1 (opțiunea 4)
F_1	S_2 (opțiunea 3)	S_4 (opțiunea 1)
F_2	S_4 (opțiunea 2)	S_2 (opțiunea 1)

Ceilalți (S_1, S_3, F_3, F_4) primesc același partener. Partea care face cererile obține rezultate cel puțin la fel de bune: studenții S_2 și S_4 preferă primul rezultat, iar firmele F_1 și F_2 pe al doilea.

Rezultatul general. Spunem că firma F este un *partener posibil* pentru studentul S dacă există *un* cuplaj stabil în care S și F sunt repartizați împreună. Arătăm că, atunci când studenții fac cererile, fiecare student primește cel mai bun partener posibil din lista lui.

Este suficient să arătăm că niciun student nu este refuzat vreodată de un partener posibil. Atunci fiecare student, care face cereri în ordinea preferințelor, se oprește cel târziu la primul partener posibil din lista lui, deci îl primește pe cel mai bun.

Presupunem contrariul și considerăm *primul* moment din desfășurarea algoritmului în care un student S este refuzat de un partener posibil F. Fie M' un cuplaj stabil în care S este repartizat la F. Firma F l-a refuzat pe S pentru un student S' pe care îl preferă lui S. În M', studentul S' este repartizat la o altă firmă F' (deoarece F este ocupată de S), deci F' este un partener posibil al lui S'. Studentul S' i-a făcut cerere lui F înainte de acest moment. Dacă S' ar prefera-o pe F' lui F, ar fi cerut-o întâi pe F' și ar fi fost refuzat de ea mai devreme, adică ar fi fost refuzat de un partener posibil înainte de momentul ales, contradicție. Deci S' o preferă pe F lui F'. Dar și F îl preferă pe S' lui S. Atunci (S', F) este o pereche blocantă pentru M', deci M' nu este stabil, contradicție.

În exemplul nostru există exact două cuplaje stabile, cele găsite la b) și d), iar fiecare parte primește, în varianta în care face cererile, un partener cel puțin la fel de bun ca în cealaltă variantă. De aceea, în aplicații reale (repartizarea rezidenților în spitale, admiterea în licee) contează cine face cererile.

Problema 12. Orarul profesorilor (colorarea muchiilor, teorema lui König)

Enunț. Trei profesori predau la patru clase numărul de ore săptămânale din tabel. Un profesor poate preda la o singură clasă într-o oră, iar o clasă are un singur profesor într-o oră. Care este numărul minim de intervale orare necesare?

	Cl1	Cl2	Cl3	Cl4	Total
Prof1	2	1	1	0	4
Prof2	1	0	1	1	3
Prof3	0	1	0	2	3

Rezolvare. *Modelarea.* Construim un graf cu vârfurile Prof1, Prof2, Prof3 de o parte și Cl1, Cl2, Cl3, Cl4 de cealaltă. Pentru fiecare oră pe care un profesor o are la o clasă desenăm câte o muchie între ei. Dacă sunt 2 ore, desenăm 2 muchii (paralele). Obținem un *multigraf bipartit* (un graf în care sunt permise mai multe muchii între aceleași două vârfuri), cu $4 + 3 + 3 = 10$ muchii, câte una pentru fiecare oră de predat.

Gradul unui vârf este numărul de ore ale profesorului sau ale clasei respective:

$$d(\text{Prof1}) = 4,\ d(\text{Prof2}) = 3,\ d(\text{Prof3}) = 3. \qquad d(\text{Cl1}) = 3,\ d(\text{Cl2}) = 2,\ d(\text{Cl3}) = 2,\ d(\text{Cl4}) = 3.$$

Gradul maxim este $\Delta = 4$, atins de Prof1.

Ce înseamnă un interval orar. Într-un interval se țin simultan mai multe ore (muchii). Condițiile din enunț spun că două ore din același interval nu pot avea același profesor și nici aceeași clasă, adică două muchii din același interval nu au capăt comun. Deci orele dintr-un interval formează un *cuplaj*. Un orar cu k intervale este o împărțire a celor 10 muchii în k cuplaje, adică o *colorare a muchiilor* cu k culori (culoarea unei muchii este intervalul în care se ține ora), în care muchiile cu un capăt comun au culori diferite. Numărul minim de culori pentru care există o astfel de colorare se numește *indicele cromatic* și se notează χ'. Problema cere exact χ'.

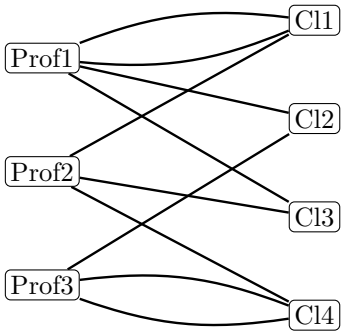
Margine inferioară: $\chi' \geq 4$. Cele 4 muchii din Prof1 au toate capătul comun Prof1, deci trebuie să aibă 4 culori diferite: Prof1 are 4 ore și nu poate ține două simultan. În general $\chi' \geq \Delta$ pentru orice graf.

Valoarea exactă (teorema lui König). Pentru orice multigraf bipartit are loc $\chi' = \Delta$. Aplicând teorema grafului nostru, cu $\Delta = 4$, obținem $\chi' = 4$: orarul se poate face în 4 intervale, iar mai puține nu ajung.

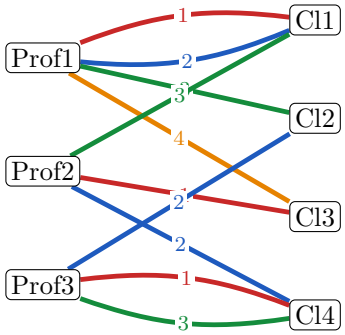
Un orar concret cu 4 intervale. Teorema garantează existența unei colorări cu 4 culori. Pentru graful nostru o găsim direct. Profesorul cel mai încărcat, Prof1, trebuie să predea în fiecare interval. Îi fixăm orele în ordinea Cl1, Cl1, Cl2, Cl3 și completăm apoi orele lui Prof2 și Prof3 astfel încât în fiecare interval clasele să fie distincte:

Interval	Prof1	Prof2	Prof3
1	Cl1	Cl3	Cl4
2	Cl1	Cl4	Cl2
3	Cl2	Cl1	Cl4
4	Cl3	–	–

În desenele de mai jos, în stânga este multigraful orelor (muchiile duble Prof1–Cl1 și Prof3–Cl4 corespund celor câte 2 ore), iar în dreapta aceeași muchii colorate după interval: 1, 2, 3, 4 (numărul intervalului e scris și pe muchie).



multigraful orelor



orarul ca o colorare a muchiilor

Verificare.

- La fiecare vârf, muchiile au culori diferite: Prof1 are culorile 1, 2, 3, 4. Prof2 are 1, 2, 3. Prof3 are 1, 2, 3. Cl1 are 1, 2, 3. Cl2 are 2, 3. Cl3 are 1, 4. Cl4 are 1, 2, 3. Deci nimeni nu are două ore în același interval.
- Fiecare muchie este colorată o singură dată, deci fiecare oră cerută apare exact o dată în orar (de exemplu, Prof1 are la Cl1 orele din intervalele 1 și 2).

Prin urmare numărul minim de intervale orare este 4.

Observație. Pentru grafuri care nu sunt bipartite rezultatul nu mai are loc: triunghiul K_3 are $\Delta = 2$, dar cele 3 muchii ale lui au două câte două un capăt comun, deci $\chi'(K_3) = 3$. În general, teorema lui Vizing dă $\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$ pentru grafuri simple (fără muchii multiple).

Problema 13. Meciuri între două cluburi (pătrate latine)

Enunț. Două cluburi de șah, cu jucătorii $a_1, \ldots, a_4$, respectiv $b_1, \ldots, b_4$, organizează o întâlnire în care fiecare jucător al primului club joacă exact o partidă cu fiecare jucător al celui de-al doilea club. Partidele se joacă în runde, iar într-o rundă fiecare jucător joacă o singură partidă.

a) Care este numărul minim de runde?

b) Arătați că un program cu acest număr de runde este același lucru cu un pătrat latin de ordin 4 și construiți un program.

c) Organizatorii cer ca în runda 1 să se joace partidele a_1b_2, a_2b_1, a_3b_4, a_4b_3. Arătați că programul poate fi completat și completați-l.

Rezolvare. Jucătorii sunt vârfurile grafului bipartit complet $K_{4,4}$, iar partidele sunt cele 16

muchii. O rundă este un cuplaj, iar un program în k runde este o colorare a muchiilor cu k culori (culoarea unei muchii este runda în care se joacă partida).

a) Fiecare jucător are 4 partide și joacă cel mult una pe rundă, deci sunt necesare cel puțin 4 runde. Conform teoremei lui König (Problema 12), muchiile unui graf bipartit se pot colora cu $\Delta = 4$ culori, deci 4 runde ajung. Într-un program cu 4 runde, fiecare rundă conține exact $16/4 = 4$ partide, deci fiecare jucător joacă în fiecare rundă.

b) Scriem programul ca o matrice L de ordin 4: pe linia i și coloana j punem runda în care joacă a_i cu b_j.

- Jucătorul a_i joacă în fiecare rundă exact o partidă, deci pe linia i fiecare rundă $1, 2, 3, 4$ apare exact o dată.
- La fel, jucătorul b_j joacă exact o partidă în fiecare rundă, deci pe coloana j fiecare rundă apare exact o dată.

Deci L este un pătrat latin. Reciproc, dintr-un pătrat latin obținem un program: în runda r se joacă partidele $a_i b_j$ pentru care $L_{ij} = r$. Fiecare jucător apare o singură dată în runda r, deoarece r apare o singură dată pe linia și pe coloana lui.

Un exemplu simplu este pătratul latin „ciclic” $L_{ij} = ((i + j - 2) \bmod 4) + 1$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

adică programul

Runda	Partide
1	$a_1b_1,\ a_2b_4,\ a_3b_3,\ a_4b_2$
2	$a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_3b_4,\ a_4b_3$
3	$a_1b_3,\ a_2b_2,\ a_3b_1,\ a_4b_4$
4	$a_1b_4,\ a_2b_3,\ a_3b_2,\ a_4b_1$

c) *Existența.* Partidele cerute pentru runda 1 formează un cuplaj perfect în $K_{4,4}$. Eliminându-le, rămâne un graf bipartit în care fiecare jucător mai are 3 partide, adică un graf 3-regulat. Conform teoremei lui König, muchiile lui se pot colora cu 3 culori, care vor fi rundele 2, 3 și 4. Deci programul poate fi completat.

Completarea, pas cu pas. Notăm cu H graful partidelor rămase după runda 1. Pentru fiecare jucător a_i, adversarii rămași sunt cei trei jucători b_j cu care nu joacă în runda 1:

$$a_1 :\ b_1, b_3, b_4, \qquad a_2 :\ b_2, b_3, b_4, \qquad a_3 :\ b_1, b_2, b_3, \qquad a_4 :\ b_1, b_2, b_4.$$

- *Runda 2.* Căutăm un cuplaj perfect în H. Partidele a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, a_4b_4 sunt toate în H și folosesc fiecare jucător o dată, deci formează runda 2.
- *Ce rămâne.* După eliminarea rundei 2, fiecare jucător mai are 2 partide:

  $$a_1 :\ b_3, b_4, \qquad a_2 :\ b_3, b_4, \qquad a_3 :\ b_1, b_2, \qquad a_4 :\ b_1, b_2.$$

  Graful rămas este 2-regulat, deci este format din cicluri. Aici sunt două cicluri de lungime 4: $a_1\, b_3\, a_2\, b_4\, a_1$ și $a_3\, b_1\, a_4\, b_2\, a_3$.

- *Rundele 3 și 4.* Într-un ciclu de lungime pară, muchiile luate „din două în două” formează un cuplaj. Din primul ciclu luăm a_1b_3, a_2b_4 pentru runda 3 și a_1b_4, a_2b_3 pentru runda 4. Din al doilea ciclu luăm a_3b_1, a_4b_2 pentru runda 3 și a_3b_2, a_4b_1 pentru runda 4.

Programul complet este:

Runda	Partide
1	$a_1b_2,\ a_2b_1,\ a_3b_4,\ a_4b_3$ (impuse)
2	$a_1b_1,\ a_2b_2,\ a_3b_3,\ a_4b_4$
3	$a_1b_3,\ a_2b_4,\ a_3b_1,\ a_4b_2$
4	$a_1b_4,\ a_2b_3,\ a_3b_2,\ a_4b_1$

Procedeul funcționează întotdeauna. După fiecare rundă extrasă, graful rămas este tot bipartit și regulat, deci, conform teoremei lui König (sau teoremei lui Hall), are un cuplaj perfect. La final, un graf bipartit 2-regulat este o reuniune de cicluri de lungime pară, care se împart mereu în două cuplaje. Pătratul latin corespunzător este

$$L' = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{1} & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & \mathbf{1} \\ 4 & 3 & \mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}.$$

Verificare. Pe fiecare linie și pe fiecare coloană apar numerele 1, 2, 3, 4, câte o dată, deci fiecare jucător joacă o partidă în fiecare rundă. Matricea are 16 poziții, deci toate cele 16 partide apar, fiecare o singură dată. Cifrele îngroșate sunt partidele impuse în runda 1.

Observație. Același raționament funcționează pentru orice cuplaj perfect impus în runda 1 și pentru orice n: dacă pozițiile tuturor cifrelor 1 sunt fixate, câte una pe fiecare linie și pe fiecare coloană, pătratul latin poate fi întotdeauna completat. Pătratele latine apar și în jocul Sudoku, unde se adaugă condiția suplimentară pe blocurile 3×3.

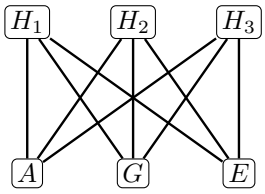
Problema 14. Trei case și trei utilități ($K_{3,3}$ nu este planar)

Enunț. Trei case trebuie legate fiecare la apă, gaz și electricitate, prin conducte care nu se intersectează (de exemplu, trasee pe un circuit imprimat cu un singur strat).

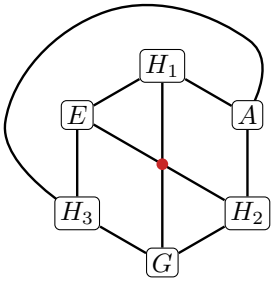
a) Este posibil?

b) Aceeași întrebare pentru 5 componente legate fiecare cu fiecare.

Rezolvare. *Modelarea.* Notăm casele cu H_1, H_2, H_3 și sursele de apă, gaz și electricitate cu A, G, E. Fiecare casă trebuie legată de fiecare sursă, deci obținem graful bipartit complet $K_{3,3}$, cu $v = 6$ vârfuri și $e = 3 \cdot 3 = 9$ muchii. Întrebarea este dacă $K_{3,3}$ se poate desena în plan fără ca muchiile să se intersecteze (în afara capetelor). Un graf care admite un astfel de desen se numește *planar*.



$K_{3,3}$: case și utilități



un desen cu o singură intersecție

Fețele unui desen planar. Un desen planar împarte planul în regiuni, numite *fețe*. Una dintre ele este nemărginită (fața exterioară). Pentru un graf planar conex cu v vârfuri, e muchii și f fețe are loc *formula lui Euler*

$$v - e + f = 2.$$

De exemplu, un pătrat desenat ($v = 4$, $e = 4$) are $f = 2$ fețe: interiorul și exteriorul.

Lungimea frontierei unei fețe. Pentru fiecare față numărăm muchiile de pe frontiera ei. Fiecare muchie separă două fețe (sau aceeași față pe ambele părți), deci este numărată de exact două ori în total:

$$\sum_{\text{fețe } F} \big(\text{numărul de muchii de pe frontiera lui } F\big) = 2e.$$

a) Presupunem, prin reducere la absurd, că $K_{3,3}$ are un desen planar, cu f fețe.

- Frontiera fiecărei fețe conține un ciclu al grafului. Graful este bipartit, deci nu are cicluri de lungime impară, în particular nici triunghiuri. Ciclurile lui au lungimea cel puțin 4. Așadar fiecare față are cel puțin 4 muchii pe frontieră.
- Din egalitatea de mai sus rezultă $4f \le 2e$, adică $f \le e/2$.
- Înlocuind în formula lui Euler:

$$2 = v - e + f \le v - e + \frac{e}{2} = v - \frac{e}{2} \quad \Longrightarrow \quad e \le 2v - 4.$$

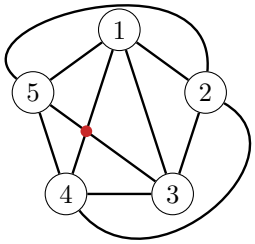
Pentru $K_{3,3}$, inegalitatea devine $9 \le 2 \cdot 6 - 4 = 8$, fals. Contradicția arată că $K_{3,3}$ *nu este planar*: cele trei case nu pot fi legate fără intersecții.

Desenul din dreapta arată că o singură intersecție este suficientă. Vârfurile sunt așezate pe un hexagon în ordinea H_1, A, H_2, G, H_3, E, deci laturile hexagonului sunt 6 dintre cele 9 legături. Celelalte 3 legături unesc vârfuri opuse: H_1G și H_2E sunt trase prin interior, iar AH_3 prin exterior. Două coarde opuse ale hexagonului se intersectează mereu în interior, deci H_1G și H_2E se taie într-un punct (marcat cu roșu). În practică, această unică intersecție se rezolvă cu o trecere pe un al doilea strat.

b) Cinci componente legate fiecare cu fiecare formează graful complet K_5, cu $v = 5$ și $e = \binom{5}{2} = 10$. Aici graful are triunghiuri, deci putem folosi doar faptul că o față are cel puțin 3 muchii pe frontieră. Același calcul dă $3f \le 2e$ și

$$2 = v - e + f \le v - e + \frac{2e}{3} = v - \frac{e}{3} \quad \Longrightarrow \quad e \le 3v - 6.$$

Pentru K_5 ar rezulta $10 \le 3 \cdot 5 - 6 = 9$, fals. Deci nici K_5 nu este planar. Și aici o singură intersecție este suficientă:



K_5 cu o singură intersecție

Observație. Grafurile K_5 și $K_{3,3}$ sunt, într-un sens precis, singurele obstrucții: conform *teoremei lui Kuratowski*, un graf este planar dacă și numai dacă nu conține o subdiviziune a lui K_5 sau a lui $K_{3,3}$ (adică una dintre ele, eventual cu muchiile înlocuite prin drumuri).

Problema 15. Așezare alternantă (cicluri hamiltoniene în $K_{n,n}$)

Enunț. La o masă rotundă stau n băieți și n fete, alternând.

a) În câte moduri distincte (până la rotație și oglindire) se poate face așezarea? Calculați pentru $n = 3$.

b) Se pot așeza alternant 5 băieți și 4 fete?

Rezolvare. O așezare alternantă este un ciclu hamiltonian în $K_{n,n}$.

a) Fixăm băiatul b_1 pe un loc (eliminăm rotațiile). Ceilalți $n-1$ băieți ocupă locurile băieților în $(n-1)!$ moduri, iar fetele cele n locuri dintre ei în $n!$ moduri. Fiecare ciclu a fost numărat de două ori (cele două sensuri), deci, pentru $n \geq 2$,

$$h(K_{n,n}) = \frac{n!\,(n-1)!}{2}.$$

Pentru $n = 3$ obținem $\frac{3!\cdot 2!}{2} = 6$ așezări. Verificare pentru $n = 2$: $K_{2,2} = C_4$ are un singur ciclu hamiltonian, iar formula dă 1.

b) Un ciclu într-un graf bipartit alternează între părți, deci folosește tot atâtea vârfuri din fiecare parte. Așadar $K_{m,n}$ cu $m \neq n$ nu are ciclu hamiltonian, iar așezarea cerută nu este posibilă. (Pe un rând drept, cu băieți la capete, se poate.)

Problema 16. Rețea socială fără triunghiuri (teorema lui Mantel)

Enunț. Într-o rețea cu 10 utilizatori nu există trei care să fie toți prieteni între ei.

a) Câte relații de prietenie pot exista cel mult?

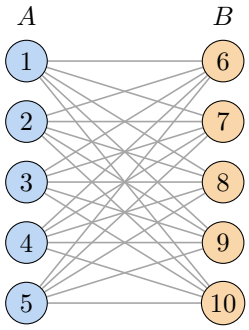
b) Generalizați la n utilizatori.

Rezolvare. *Modelarea.* Utilizatorii sunt vârfurile unui graf G cu n vârfuri, iar o muchie înseamnă o relație de prietenie. Trei utilizatori prieteni doi câte doi formează un *triunghi* în G. Căutăm numărul maxim e de muchii al unui graf cu n vârfuri fără triunghiuri. Fără restricție, maximul ar fi $\binom{n}{2}$, realizat de K_n. Pentru $n = 10$ acesta este 45. Vom arăta că, pentru grafurile fără triunghiuri,

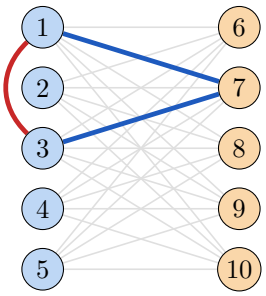
$$e \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor,$$

cu egalitate pentru graful bipartit complet cu părțile cât mai egale. Pentru $n = 10$ răspunsul este $\lfloor 100/4 \rfloor = 25$.

Pasul 1: o rețea cu 25 de prietenii și fără triunghiuri. Împărțim cei 10 utilizatori în două grupuri $A = \{1, \dots, 5\}$ și $B = \{6, \dots, 10\}$ și declarăm prieteni pe oricare doi utilizatori din grupuri diferite, iar pe cei din același grup, nu. Obținem $K_{5,5}$, cu $5 \cdot 5 = 25$ de muchii. Nu există triunghiuri: dintre trei vârfuri, două sunt în același grup (principiul cutiei), iar acestea nu sunt prieteni. (Altfel spus, $K_{5,5}$ e bipartit, deci nu are cicluri impare.)



$K_{5,5}$: 25 de prietenii, fără triunghiuri



o prietenie nouă 1–3 creează triunghiul $1, 3, 7$

Rețeaua este și *maximală*: dacă mai adăugăm o prietenie, ea leagă doi utilizatori din același grup, de exemplu 1 și 3, iar împreună cu orice utilizator din celălalt grup, de exemplu 7, se formează triunghiul $1, 3, 7$ (desenul din dreapta).

În general, pentru n utilizatori împărțiți în grupuri de a și $b = n - a$ persoane, graful $K_{a,b}$ nu are triunghiuri și are ab muchii. Din identitatea

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{n^2 - (a-b)^2}{4}$$

se vede că ab este maxim când $|a - b|$ este cât mai mic: $a = b = n/2$ pentru n par, de unde $ab = n^2/4$, respectiv $|a - b| = 1$ pentru n impar, de unde $ab = (n^2 - 1)/4$. În ambele cazuri $ab = \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Pasul 2: nu se poate mai mult. Fie G un graf oarecare cu n vârfuri, e muchii și fără triunghiuri. Notăm cu $d(v)$ gradul vârfului v (numărul de prieteni ai lui v).

(1) *Doi prieteni nu au prieteni comuni.* Fie uv o muchie. Dacă un vârf w ar fi vecin și cu u, și cu v, atunci u, v, w ar forma un triunghi. Deci $N(u) \cap N(v) = \emptyset$. Cum ambele mulțimi sunt incluse în cele n vârfuri ale grafului,

$$d(u) + d(v) = |N(u)| + |N(v)| \le n \qquad \text{pentru orice muchie } uv.$$

(2) *Sumăm peste toate muchiile.* Obținem $\sum_{uv \in E} \big(d(u) + d(v)\big) \le n\, e$. În suma din stânga, un vârf v apare o dată pentru fiecare muchie care îl conține, adică de $d(v)$ ori, și de fiecare dată contribuie cu $d(v)$. Prin urmare

$$\sum_{uv \in E} \big(d(u) + d(v)\big) = \sum_{v \in V} d(v)^2, \qquad \text{deci} \qquad \sum_{v \in V} d(v)^2 \le n\, e.$$

(3) *Margine inferioară pentru suma pătratelor.* Inegalitatea Cauchy–Schwarz $\big(\sum_v d(v) \cdot 1\big)^2 \le \big(\sum_v d(v)^2\big)\big(\sum_v 1^2\big)$, împreună cu lema strângerilor de mână $\sum_v d(v) = 2e$, dă

$$\sum_{v \in V} d(v)^2 \;\ge\; \frac{1}{n}\Big(\sum_{v \in V} d(v)\Big)^2 = \frac{4e^2}{n}.$$

(4) *Concluzia.* Din (2) și (3), $\dfrac{4e^2}{n} \le n\, e$. Dacă $e > 0$, împărțim la e și obținem $e \le \dfrac{n^2}{4}$. Cum e este întreg, $e \le \lfloor n^2/4 \rfloor$.

Răspuns. Pentru 10 utilizatori pot exista cel mult 25 de prietenii, iar valoarea este atinsă de $K_{5,5}$. Pentru n utilizatori maximul este $\lfloor n^2/4 \rfloor$, atins de $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.

Comentariu. Interzicerea triunghiurilor reduce numărul maxim de prietenii de la 45 (în K_{10}) la 25. Generalizarea este teorema lui Turán: un graf cu n vârfuri fără K_{r+1} are cel mult atâtea muchii câte are graful r-partit complet cu părțile cât mai egale.

Problema 17. Strângeri de mână la o petrecere

Enunț. Arătați că la orice petrecere cu cel puțin două persoane există două persoane care au dat același număr de strângeri de mână.

Rezolvare. Fie $n \geq 2$ numărul de persoane. Gradul fiecărei persoane în graful strângerilor de mână aparține mulțimii $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, care are n elemente. Valorile 0 și $n-1$ nu pot apărea simultan: o persoană cu gradul $n-1$ a dat mâna cu toți, deci nimeni nu are gradul 0. Prin urmare cele n grade iau valori într-o mulțime de cel mult $n-1$ elemente (fie $\{0, \ldots, n-2\}$, fie $\{1, \ldots, n-1\}$). După principiul cutiei, două persoane au același grad.

Problema 18. Grupuri în care fiecare cunoaște exact trei persoane

Enunț. Pot 9 persoane să cunoască fiecare exact 3 dintre celelalte? Dar 10 persoane?

Rezolvare. Dacă fiecare dintre cele 9 persoane ar cunoaște exact 3, suma gradelor ar fi $9 \cdot 3 = 27$, număr impar. Lema strângerilor de mână cere ca suma să fie $2|E|$, deci pară: contradicție. Pentru 10 persoane suma ar fi 30, iar o astfel de configurație există. De exemplu, așezăm persoanele $0, 1, \ldots, 9$ în cerc și declarăm că i îi cunoaște pe $i-1$, $i+1$ și $i+5$ (modulo 10). Relația este simetrică (dacă $j = i+5$, atunci $i = j+5$), iar fiecare persoană are exact 3 cunoștințe. (O altă soluție este graful lui Petersen.)

Problema 19. Arborii sunt bipartiți

Enunț. O rețea de distribuție are forma unui arbore. Arătați că nodurile ei pot fi împărțite în două clase astfel încât orice legătură să unească noduri din clase diferite (adică orice arbore este bipartit). Dați o astfel de împărțire pentru un arbore concret.

Rezolvare. Fie T un arbore și r un vârf fixat. Pentru fiecare vârf v notăm cu $d(r, v)$ lungimea unicului drum de la r la v. Punem $A = \{v : d(r, v) \text{ par}\}$ și $B = \{v : d(r, v) \text{ impar}\}$. Dacă uv este o muchie, atunci unul dintre vârfuri, să zicem v, este părintele celuilalt pe drumul de la r, deci $d(r, u) = d(r, v) + 1$. Așadar capetele au parități diferite și (A, B) este o bipartiție. (Alternativ: un arbore nu are cicluri, deci nici cicluri impare.)

Exemplu: arborele cu muchiile 12, 13, 24, 25, 36, cu rădăcina $r = 1$. Distanțele sunt 0 pentru vârful 1, 1 pentru vârfurile 2 și 3, 2 pentru vârfurile 4, 5, 6. Obținem $A = \{1, 4, 5, 6\}$ și $B = \{2, 3\}$.

Problema 20. Repartizarea temelor de proiect

Enunț. Șase studenți aleg dintre șase teme de proiect. Fiecare student indică exact 2 teme, iar fiecare temă este indicată de exact 2 studenți. Arătați că fiecare student poate primi o temă distinctă dintre cele indicate.

Rezolvare. *Modelarea.* Notăm studenții cu $S_1, \ldots, S_6$ și temele cu $T_1, \ldots, T_6$. Construim graful bipartit cu studenții într-o parte și temele în cealaltă, cu o muchie $S_i T_j$ dacă studentul S_i a

indicat tema T_j. Ipotezele spun că fiecare student are gradul 2 și fiecare temă are gradul 2. În total sunt $6 \cdot 2 = 12$ muchii (numărate din partea studenților sau, la fel, din partea temelor). O repartizare în care fiecare student primește o temă distinctă dintre cele indicate este un cuplaj care saturează toți studenții.

Verificarea condiției lui Hall. Fie S o mulțime oarecare de studenți și $N(S)$ mulțimea temelor indicate de cel puțin un student din S. Numărăm muchiile care pleacă din S, în două moduri:

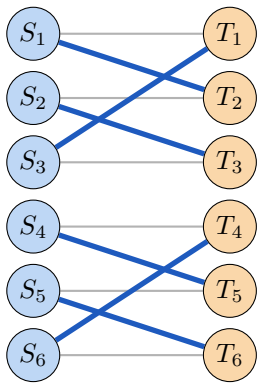
- Fiecare student din S are exact 2 muchii, deci din S pleacă exact $2|S|$ muchii.
- Fiecare dintre aceste muchii ajunge la o temă din $N(S)$, prin definiția lui $N(S)$. Cum fiecare temă are exact 2 muchii, temele din $N(S)$ au în total $2|N(S)|$ muchii, printre care se află toate cele $2|S|$ muchii de mai sus.

Rezultă $2|S| \leq 2|N(S)|$, adică $|N(S)| \geq |S|$, pentru orice mulțime S de studenți. Condiția lui Hall este îndeplinită, deci există un cuplaj care saturează toți studenții: fiecare student primește o temă dintre cele indicate, iar studenți diferiți primesc teme diferite. Cum sunt tot atâtea teme câți studenți, cuplajul este perfect, deci fiecare temă este repartizată exact o dată.

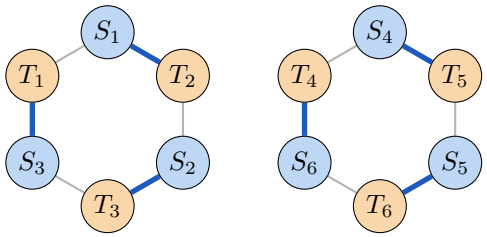
Un exemplu concret. Să presupunem că alegerile sunt:

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
T_1, T_2	T_2, T_3	T_3, T_1	T_4, T_5	T_5, T_6	T_6, T_4

Fiecare temă este indicată de exact doi studenți (de exemplu, T_1 de S_1 și S_3).



graful alegerilor și un cuplaj perfect



același graf: două cicluri de lungime 6

Cum găsim efectiv repartizarea. Într-un graf în care toate vârfurile au gradul 2, pornind dintr-un vârf și mergând mereu pe muchia nefolosită, ne întoarcem în vârful de plecare: fiecare componentă conexă este un ciclu. Graful fiind bipartit, ciclurile au lungime pară (alternează student, temă, student, …). În exemplu obținem două cicluri de lungime 6 (desenul din dreapta):

$$S_1\, T_2\, S_2\, T_3\, S_3\, T_1\, S_1 \qquad \text{și} \qquad S_4\, T_5\, S_5\, T_6\, S_6\, T_4\, S_4.$$

Alegând din fiecare ciclu muchiile din două în două (îngroșate în desen) obținem repartizarea

$$S_1 \to T_2, \quad S_2 \to T_3, \quad S_3 \to T_1, \quad S_4 \to T_5, \quad S_5 \to T_6, \quad S_6 \to T_4.$$

Cealaltă jumătate a muchiilor din fiecare ciclu dă o a doua repartizare posibilă ($S_1 \to T_1$, $S_2 \to T_2$, $S_3 \to T_3$, …), deci în exemplu există și alte soluții.

Observație. Același argument de numărare arată că orice graf bipartit k-regulat ($k \geq 1$) are un cuplaj perfect: dacă fiecare student indică exact k teme și fiecare temă este indicată de exact k studenți, repartizarea este întotdeauna posibilă.

Problema 21. Atribuire cu pasul de modificare (algoritmul ungar)

Enunț. Trei angajați trebuie repartizați pe trei sarcini, câte unul pe sarcină, cu costurile date de matricea

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(rândurile sunt angajații, coloanele sarcinile). Determinați repartizarea de cost minim folosind algoritmul ungar.

Rezolvare.

Pasul 1. Minimele liniilor sunt $1, 0, 2$. După scădere:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pasul 2. Minimele coloanelor sunt $1, 0, 0$. După scădere:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Constantele scăzute până acum însumează $1 + 0 + 2 + 1 = 4$.

Pasul 3. Zerourile se află pe pozițiile $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$. Ele sunt acoperite de coloana 2 și rândul 3, adică de $k = 2 < 3$ linii. Liniile 1 și 2 au zerouri doar în coloana 2, deci nu există 3 zerouri independente.

Pasul 4. Elementele neacoperite sunt cele din rândurile 1, 2 și coloanele 1, 3: $2, 2, 1, 5$. Minimul lor este $\delta = 1$. Scădem 1 din elementele neacoperite și adunăm 1 la intersecția $(3,2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Marginea inferioară crește cu $\delta(n-k) = 1$, devenind 5.

Pasul 3 (din nou). Zerourile sunt pe pozițiile $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$, $(3,3)$. Acoperirea lor cere acum 3 linii.

Pasul 5. Rândul 1 are un singur zero, în coloana 2: selectăm $(1,2)$. Rămâne rândul 2, cu zero în coloana 1, deci selectăm $(2,1)$. Rândul 3 primește coloana 3. Atribuirea optimă este

$$1 \mapsto 2, \qquad 2 \mapsto 1, \qquad 3 \mapsto 3,$$

cu costul $c_{12} + c_{21} + c_{33} = 1 + 2 + 2 = 5$, egal cu marginea inferioară 5, deci optim. Verificare prin enumerare: cele $3! = 6$ permutări, în ordine lexicografică, au costurile $6, 11, 5, 9, 7, 6$, cu minimul 5.

Problema 22. Desene planare pentru $K_{2,n}$ și $K_{3,3}$ fără o muchie

Enunț. Arătați că $K_{2,n}$ este planar pentru orice n (de exemplu, două centrale legate fiecare de n consumatori fără ca liniile să se intersecteze) și că $K_{3,3}$ fără o muchie este planar.

Rezolvare. *$K_{2,n}$ este planar.* Fie părțile $\{a, b\}$ și $\{w_1, \ldots, w_n\}$. Plasăm $a = (0, 1)$, $b = (0, -1)$ și $w_i = (i, 0)$, iar fiecare muchie o desenăm ca segment. Segmentele din a stau, în afara capetelor de pe axă, în semiplanul $y > 0$ și se întâlnesc doar în a. Cele din b stau în semiplanul $y < 0$ și se întâlnesc doar în b. Un segment din a și unul din b se pot întâlni doar pe axa Ox, adică într-un vârf comun w_i. Deci desenul nu are intersecții.

$K_{3,3}$ fără o muchie este planar. Fie părțile $\{a_1, a_2, a_3\}$ și $\{b_1, b_2, b_3\}$ și eliminăm muchia a_3b_3. Vârfurile a_1, a_2 sunt legate de toți b_j: desenăm acest $K_{2,3}$ ca mai sus, cu $a_1 = (0, 1)$, $a_2 = (0, -1)$, $b_j = (j, 0)$. Segmentul de pe axa Ox dintre b_1 și b_2 nu este intersectat de nicio muchie. Plasăm $a_3 = (\frac{3}{2}, 0)$ și îl legăm de b_1 și b_2 prin cele două jumătăți ale acestui segment. Rezultă un desen planar cu 6 vârfuri și 8 muchii. (Este în acord cu marginea $e \leq 2v - 4 = 8$, care pentru $K_{3,3}$ cu 9 muchii era încălcată.)

Probleme propuse

Problemele marcate cu ★ sunt mai provocatoare intelectual.

1. **Întâlniri în perechi.** La un eveniment de tip *speed networking* participă 9 persoane. Întâlnirile au loc în runde. Într-o rundă fiecare persoană are cel mult o întâlnire, iar la final oricare două persoane trebuie să se fi întâlnit exact o dată.
   a) Câte întâlniri au loc în total?
   b) Care este numărul minim de runde? Justificați.
   c) Construiți un program cu acest număr de runde. De câte ori stă fiecare persoană fără partener?

2. **În câte moduri se pot forma perechile?**
   a) În câte moduri se pot împărți 8 studenți în 4 perechi de laborator? Generalizați pentru $2n$ studenți (numărul cuplajelor perfecte ale lui K_{2n}).
   b) În câte moduri se pot forma 4 perechi de dans din 4 băieți și 4 fete? Generalizați (numărul cuplajelor perfecte ale lui $K_{n,n}$).
   c) Doi dintre cei 8 studenți nu vor să lucreze împreună. În câte moduri se pot forma acum perechile?

3. **Rețea tolerantă la defecțiuni.** Șase servere trebuie legate printr-o rețea care să rămână conexă după căderea oricăror 2 legături.
   a) Arătați că fiecare server trebuie să aibă cel puțin 3 legături.
   b) Deduceți numărul minim de legături ale unei astfel de rețele.
   c) Construiți o rețea care atinge acest minim și verificați că are proprietatea cerută.

4. **Traseul unui curier.** Un curier pleacă din depozitul A, livrează în punctele B, C, D, E câte o dată și revine în A. Distanțele (km) sunt:

	A	B	C	D	E
A	–	11	3	5	14
B	11	–	2	8	10
C	3	2	–	13	9
D	5	8	13	–	7
E	14	10	9	7	–

   a) Găsiți traseul cel mai scurt.
   b) Aplicați euristica „cel mai apropiat vecin” pornind din A și comparați rezultatul cu optimul.
   c) Aplicați aceeași euristică pornind din fiecare dintre punctele B, C, D, E (ciclul obținut se parcurge apoi începând din A). Depinde rezultatul de punctul de plecare?

5. **Masă rotundă cu 9 participanți.** Nouă participanți la o școală de vară iau cina la o masă rotundă. Câte seri sunt necesare pentru ca oricare doi participanți să stea alături exact o dată? Construiți așezările, adaptând construcția lui Walecki, și verificați că nicio pereche nu se repetă.

6. **Seturi de domino.** Setul de domino „până la n” conține câte o piesă pentru fiecare pereche de numere de la 0 la n, inclusiv dublurile.

a) Pentru ce valori ale lui n se pot așeza toate piesele setului într-un cerc?

b) Care este numărul minim de piese care trebuie eliminate din setul până la 5 pentru ca piesele rămase să poată fi așezate într-un cerc? Dar într-un singur șir?

7. Săriturile calului. Considerăm graful care are ca vârfuri pătratele unei table de șah $n \times n$, două pătrate fiind unite printr-o muchie dacă un cal poate sări dintr-unul în celălalt.

a) Arătați că acest graf este bipartit.

b) Arătați că pe tabla 5×5 calul nu poate parcurge toate pătratele, câte o dată, revenind la final în pătratul de plecare.

c) Se poate aplica același argument pentru tabla 6×6?

8. ★ Hipercubul și codul Gray. Graful Q_n are ca vârfuri șirurile de n biți (de exemplu, Q_3 are vârfurile $000, 001, \ldots, 111$), două șiruri fiind unite printr-o muchie dacă diferă într-o singură poziție.

a) Determinați numărul de vârfuri, gradele și numărul de muchii ale lui Q_n.

b) Arătați că Q_n este bipartit.

c) Desenați Q_3 ca un cub și găsiți în el un ciclu hamiltonian.

d) Arătați că Q_n are un ciclu hamiltonian pentru orice $n \geq 2$. (Un astfel de ciclu se numește *cod Gray*: el trece prin toate șirurile, iar două șiruri consecutive diferă într-un singur bit.)

9. Acoperiri cu dominouri. Un domino acoperă exact două pătrate vecine (cu o latură comună) ale unei table de șah 8×8.

a) Formulați problema acoperirii tablei cu 32 de dominouri ca problemă de cuplaj perfect într-un graf bipartit.

b) Se elimină două colțuri opuse ale tablei. Arătați că cele 62 de pătrate rămase nu pot fi acoperite cu 31 de dominouri.

c) Se elimină două pătrate vecine de pe marginea tablei. Se pot acoperi pătratele rămase?

10. Maximizarea profitului. Patru vânzători $V_1, \ldots, V_4$ trebuie repartizați în patru magazine $M_1, \ldots, M_4$, câte unul în fiecare magazin. Profitul lunar estimat (mii lei) este:

	M_1	M_2	M_3	M_4
V_1	7	5	8	6
V_2	4	6	5	3
V_3	8	7	6	5
V_4	5	4	7	6

Determinați, cu ajutorul algoritmului ungar, repartizarea care maximizează profitul total.

11. Orar. Trei profesori predau la trei clase următorul număr de ore săptămânale:

	Cl1	Cl2	Cl3
Prof1	1	2	0
Prof2	1	0	2
Prof3	1	1	1

a) Care este numărul minim de intervale orare necesare? Construiți un orar.

b) Prof1 primește încă o oră la Cl3. Cum se modifică răspunsul? Construiți noul orar.

12. ★ Graful lui Petersen. Vârfurile grafului sunt cele 10 submulțimi cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$. Două vârfuri sunt unite printr-o muchie dacă submulțimile corespunzătoare sunt disjuncte.

a) Determinați numărul de muchii și gradele vârfurilor.

b) Arătați că graful nu are cicluri de lungime 3 sau 4.

c) Adaptând argumentul din Problema 14, arătați că graful nu este planar.

13. Un campionat neterminat. Într-un campionat cu 10 echipe, în care oricare două echipe se întâlnesc cel mult o dată, s-au disputat până acum 26 de meciuri.

a) Arătați că există trei echipe care au jucat deja fiecare cu fiecare.

b) Rămâne afirmația adevărată dacă s-au disputat doar 25 de meciuri?

Rezolvarea problemelor propuse

Problema propusă 1. Întâlniri în perechi

Persoanele sunt vârfurile grafului complet K_9, iar întâlnirile sunt muchiile lui. O rundă este un cuplaj: o mulțime de muchii fără capete comune.

a) Fiecare pereche se întâlnește o dată, deci au loc $\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$ de întâlniri.

b) Într-o rundă, fiecare întâlnire ocupă 2 persoane, iar 9 este impar, deci într-o rundă au loc cel mult 4 întâlniri și cel puțin o persoană stă fără partener. Sunt necesare cel puțin $36/4 = 9$ runde. Vom vedea că 9 runde ajung.

c) Adaptăm metoda cercului din Problema 1. Așezăm persoanele $1,\dots,9$ pe un cerc. În runda r persoana r stă, iar celelalte se întâlnesc „simetric față de r”: persoanele aflate la i pași în stânga și în dreapta lui r ($i = 1,2,3,4$). Altfel spus, x și y se întâlnesc în runda r dacă $x + y \equiv 2r \pmod 9$, cu $x, y \neq r$.

Runda	Stă	Întâlniri
1	1	2–9, 3–8, 4–7, 5–6
2	2	1–3, 4–9, 5–8, 6–7
3	3	2–4, 1–5, 6–9, 7–8
4	4	3–5, 2–6, 1–7, 8–9
5	5	4–6, 3–7, 2–8, 1–9
6	6	5–7, 4–8, 3–9, 1–2
7	7	6–8, 5–9, 1–4, 2–3
8	8	7–9, 1–6, 2–5, 3–4
9	9	1–8, 2–7, 3–6, 4–5

Verificare. O pereche $\{x,y\}$ se întâlnește în runda r exact când $2r \equiv x + y \pmod 9$. Cum 2 este inversabil modulo 9 ($2 \cdot 5 = 10 \equiv 1$), avem $r \equiv 5(x+y) \pmod 9$, deci există o singură rundă pentru fiecare pereche. În plus, $r \neq x$, deoarece altfel $y \equiv x$. Tabelul conține $9 \cdot 4 = 36$ de întâlniri, toate diferite.

Fiecare persoană stă fără partener exact o dată (în runda cu numărul ei). Acest lucru era inevitabil: o persoană are 8 întâlniri în 9 runde, deci stă exact $9 - 8 = 1$ rundă.

Problema propusă 2. În câte moduri se pot forma perechile?

a) O împărțire în perechi este un cuplaj perfect în K_8. Le numărăm alegând perechile pe rând. Studentul cu numărul cel mai mic își alege partenerul în 7 moduri. Dintre cei 6 rămași, cel cu numărul cel mai mic își alege partenerul în 5 moduri, apoi următorul în 3 moduri, iar ultimii doi formează perechea rămasă. Fiecare împărțire se obține exact o dată, deci numărul este

$$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105.$$

Pentru $2n$ studenți, același raționament dă

$$(2n-1) \cdot (2n-3) \cdots 3 \cdot 1 = (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}.$$

A doua formă se obține și direct: așezăm cei $2n$ studenți în linie, în $(2n)!$ moduri, și formăm perechile din pozițiile 1–2, 3–4 etc. Fiecare împărțire apare de $2^n n!$ ori (ordinea în fiecare pereche și ordinea perechilor). Pentru $n = 4$: $\frac{40320}{16 \cdot 24} = 105$.

b) O împărțire în perechi băiat–fată este un cuplaj perfect în $K_{4,4}$. Primul băiat își alege partenera în 4 moduri, al doilea în 3, al treilea în 2, iar ultimul primește fata rămasă: $4! = 24$ de moduri. În general, $K_{n,n}$ are $n!$ cuplaje perfecte, câte unul pentru fiecare permutare. Aceasta explică de ce problema de atribuire nu se rezolvă prin încercarea tuturor variantelor: pentru $n = 10$ există deja $10! = 3\,628\,800$ de atribuiri.

c) Numărăm împărțirile în care cei doi sunt totuși împreună: perechea lor este fixată, iar ceilalți 6 studenți se împart în $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ moduri. Rămân $105 - 15 = 90$ de împărțiri acceptabile.

Problema propusă 3. Rețea tolerantă la defecțiuni

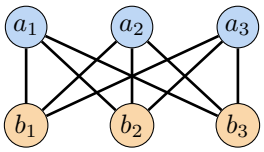
Serverele sunt vârfurile, iar legăturile sunt muchiile unui graf cu 6 vârfuri. Cerința este ca graful să rămână conex după eliminarea oricăror două muchii.

a) Dacă un server v ar avea cel mult 2 legături, căderea acestora l-ar izola de celelalte. Deci $d(v) \geq 3$ pentru orice server.

b) Din lema strângerilor de mână,

$$2|E| = \sum_{v} d(v) \geq 6 \cdot 3 = 18, \qquad \text{deci } |E| \geq 9.$$

c) Graful bipartit complet $K_{3,3}$ are exact $3 \cdot 3 = 9$ muchii. Notăm părțile cu $\{a_1, a_2, a_3\}$ și $\{b_1, b_2, b_3\}$.



Arătăm că între oricare două servere există trei drumuri fără muchii comune. Atunci, după căderea a două legături, cel puțin unul dintre cele trei drumuri rămâne intact, deci serverele comunică în continuare.

- Servere din părți diferite, de exemplu a_1 și b_1: drumurile a_1b_1, $a_1b_2a_2b_1$ și $a_1b_3a_3b_1$.

- Servere din aceeași parte, de exemplu a_1 și a_2: drumurile $a_1b_1a_2$, $a_1b_2a_2$ și $a_1b_3a_2$.

Celelalte cazuri se obțin prin renumerotare. Rețeaua $K_{3,3}$ atinge deci minimul de 9 legături. (O altă soluție este prisma: două triunghiuri 123 și 456, plus muchiile 14, 25, 36.)

Problema propusă 4. Traseul unui curier

a) Fixăm plecarea din A. Un traseu este o ordine a punctelor B, C, D, E, iar un traseu și inversul lui au aceeași lungime, deci sunt $4!/2 = 12$ trasee distincte:

Traseu	km	Traseu	km
$A\,B\,C\,D\,E\,A$	47	$A\,C\,B\,D\,E\,A$	34
$A\,B\,C\,E\,D\,A$	34	$A\,C\,B\,E\,D\,A$	**27**
$A\,B\,D\,C\,E\,A$	55	$A\,C\,D\,B\,E\,A$	48
$A\,B\,D\,E\,C\,A$	38	$A\,C\,E\,B\,D\,A$	35
$A\,B\,E\,C\,D\,A$	48	$A\,D\,B\,C\,E\,A$	38
$A\,B\,E\,D\,C\,A$	44	$A\,D\,C\,B\,E\,A$	44

Traseul cel mai scurt este

$$A \to C \to B \to E \to D \to A, \qquad 3 + 2 + 10 + 7 + 5 = 27 \text{ km}.$$

b) Cel mai apropiat vecin din A: C (3), apoi din C: B (2), din B: D (8), din D: E (7), apoi înapoi la A (14). Traseul $A\,C\,B\,D\,E\,A$ are 34 km, cu 7 km peste optim. Greșeala apare la sfârșit: euristica alege la fiecare pas legătura cea mai scurtă, iar la final este obligată să folosească legătura scumpă E–A (14 km).

c) Aplicăm euristica din celelalte puncte:

Plecare	Ciclul obținut	Parcurs din A	km
B	$B\,C\,A\,D\,E\,B$	$A\,D\,E\,B\,C\,A$	**27**
C	$C\,B\,D\,A\,E\,C$	$A\,E\,C\,B\,D\,A$	38
D	$D\,A\,C\,B\,E\,D$	$A\,C\,B\,E\,D\,A$	**27**
E	$E\,D\,A\,C\,B\,E$	$A\,C\,B\,E\,D\,A$	**27**

De exemplu, din C: $C \to B$ (2), $B \to D$ (8), $D \to A$ (5), $A \to E$ (14), $E \to C$ (9), în total 38 km. Rezultatul depinde deci de punctul de plecare: din B, D și E se obține optimul (același ciclu, de 27 km), din A se obțin 34 km, iar din C 38 km. O îmbunătățire simplă a euristicii este s-o aplicăm din fiecare punct și să păstrăm cel mai bun ciclu.

Problema propusă 5. Masă rotundă cu 9 participanți

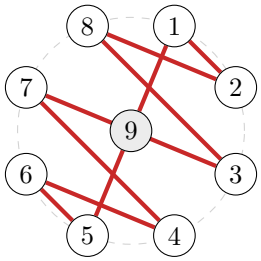
Ca în Problema 6, o seară este un ciclu hamiltonian în K_9. Fiecare participant are într-o seară 2 vecini și trebuie să stea alături de ceilalți 8, deci sunt necesare $8/2 = 4$ seri. Numărând perechile: $\binom{9}{2} = 36$, iar fiecare seară folosește 9 perechi, deci $36/9 = 4$.

Construcția lui Walecki. Participantul 9 este „centrul”, iar $1, \ldots, 8$ se gândesc așezați în vârfurile unui octogon regulat. Pornim de la drumul în zigzag

$$1,\ 2,\ 8,\ 3,\ 7,\ 4,\ 6,\ 5,$$

care traversează octogonul alternativ dintr-o parte în alta. Muchiile lui unesc vârfuri aflate pe octogon la distanțele $1, 2, 3, 4, 3, 2, 1$, iar capetele 1 și 5 sunt opuse. Închidem drumul prin centrul 9. Pentru serile următoare rotim octogonul, adunând 1 la fiecare număr din $\{1, \ldots, 8\}$ (cu $8 + 1 = 1$), iar 9 rămâne pe loc:

Seara	Ordinea în jurul mesei
1	9, 1, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5
2	9, 2, 3, 1, 4, 8, 5, 7, 6
3	9, 3, 4, 2, 5, 1, 6, 8, 7
4	9, 4, 5, 3, 6, 2, 7, 1, 8



Seara 1

Verificare. Pentru doi participanți $i, j \in \{1, \ldots, 8\}$ numim *distanța lor pe octogon* numărul minim de pași de-a lungul octogonului de la unul la celălalt. Ea este 1, 2, 3 sau 4. Pe octogon există 8 perechi la distanța 1 $(12, 23, \ldots, 78, 81)$, 8 la distanța 2, 8 la distanța 3 și 4 perechi opuse, la distanța 4 $(15, 26, 37, 48)$. Împreună cu cele 8 perechi de forma $9i$, acestea sunt toate cele $8 + 8 + 8 + 4 + 8 = 36$ de perechi. Grupăm perechile de vecini din fiecare seară după tipul lor:

Seara	Cu centrul 9	Distanța 1	Distanța 2	Distanța 3	Distanța 4
1	91, 95	12, 56	28, 46	38, 47	37
2	92, 96	23, 67	13, 57	14, 58	48
3	93, 97	34, 78	24, 68	25, 16	15
4	94, 98	45, 18	35, 17	36, 27	26

Explicația este următoarea. Rotația adună 1 la fiecare număr de pe octogon, deci păstrează distanțele. În seara 1, perechile de fiecare tip $d = 1, 2, 3$ sunt două, de forma $\{x, x + d\}$ și $\{x + 4, x + 4 + d\}$, adică „opuse” pe octogon (de exemplu 12 și 56). Prin cele 4 rotații, prima pereche trece prin pozițiile $x, x + 1, x + 2, x + 3$, iar a doua prin $x + 4, \ldots, x + 7$, deci împreună acoperă exact o dată toate cele 8 poziții, adică toate cele 8 perechi de tipul respectiv. La fel, perechile cu centrul, 91 și 95, devin 92, 96, apoi 93, 97 și 94, 98: toate cele 8. Perechea opusă 37 devine 48, 15, 26: toate cele 4 perechi opuse. Prin urmare cele $4 \cdot 9 = 36$ de perechi din tabel sunt toate diferite și acoperă toate perechile posibile. Fiecare participant stă lângă fiecare alt participant exact o dată.

Problema propusă 6. Seturi de domino

Ca în Problema 7, piesele setului până la n sunt muchiile grafului complet K_{n+1} cu vârfurile $0, \ldots, n$, la care se adaugă câte o buclă în fiecare vârf (dublurile).

a) În K_{n+1} fiecare vârf are gradul n, iar bucla adaugă 2, deci gradul este $n+2$. Graful este conex. Conform teoremei lui Euler, piesele pot fi așezate în cerc dacă și numai dacă $n+2$ este par, adică n este par. De exemplu, setul obișnuit ($n = 6$) se poate așeza în cerc (Problema 7), dar setul până la 5 nu.

b) În setul până la 5, toate cele 6 vârfuri au gradul 7, impar. Eliminarea unei dubluri scade gradul unui vârf cu 2 și nu schimbă parităţile. Eliminarea unei piese a–b cu $a \neq b$ schimbă paritatea exact a două vârfuri, a și b.

- *Cerc.* Trebuie ca toate gradele să devină pare, deci trebuie schimbată paritatea a 6 vârfuri. Fiecare piesă eliminată schimbă cel mult 2, deci sunt necesare cel puțin 3 piese. Trei piese ajung: eliminăm 0–1, 2–3, 4–5. Acum fiecare vârf are gradul 6, iar graful rămâne conex, deci cele 18 piese rămase formează un cerc. De exemplu:

  0–5, 5–5, 5–1, 1–1, 1–4, 4–4, 4–3, 3–3, 3–5,
  5–2, 2–2, 2–4, 4–0, 0–3, 3–1, 1–2, 2–0, 0–0.

- *Șir.* Un drum eulerian deschis cere exact două vârfuri de grad impar, deci trebuie schimbată paritatea a 4 vârfuri: sunt necesare cel puțin 2 piese. Două piese ajung: eliminăm 0–1 și 2–3. Vârfurile de grad impar rămân 4 și 5, deci cele 19 piese rămase formează un șir de la 4 la 5. De exemplu:

  4–0, 0–0, 0–2, 2–1, 1–3, 3–0, 0–5, 5–2, 2–2, 2–4,
  4–3, 3–3, 3–5, 5–4, 4–4, 4–1, 1–1, 1–5, 5–5.

Problema propusă 7. Săriturile calului

a) Colorăm tabla în alb și negru, ca tabla de șah. O săritură a calului modifică o coordonată cu 1 și cealaltă cu 2, deci suma coordonatelor se schimbă cu un număr impar ($\pm 1 \pm 2$). Prin urmare calul sare mereu pe un pătrat de cealaltă culoare. Orice muchie unește un pătrat alb cu unul negru, deci graful este bipartit, cu părțile date de culori.

b) Un traseu care trece o dată prin toate pătratele și revine în pătratul de plecare este un ciclu hamiltonian. Într-un graf bipartit, un ciclu alternează culorile, deci are lungime pară. Pe tabla 5×5 ciclul ar avea lungimea 25, număr impar, ceea ce este imposibil. Altfel spus: tabla are 13 pătrate de o culoare și 12 de cealaltă, iar un ciclu alternant folosește la fel de multe pătrate din fiecare culoare.

c) Nu. Tabla 6×6 are 36 de pătrate, câte 18 de fiecare culoare, deci argumentul de paritate nu exclude nimic. De fapt, pe tabla 6×6 există trasee închise ale calului. Un exemplu este dat mai jos: calul pleacă din $a1$ (pătratul 1), sare pe rând în pătratele numerotate $2, 3, \ldots, 36$, iar din pătratul 36 ($b3$) revine în $a1$ printr-o ultimă săritură.

6	32	23	8	15	30	21
5	7	14	31	22	5	16
4	24	33	6	9	20	29
3	13	36	11	28	17	4
2	34	25	2	19	10	27
1	1	12	35	26	3	18
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*

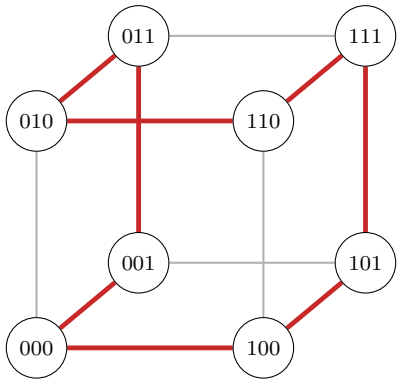
Se poate verifica direct că oricare două numere consecutive (și perechea 36, 1) se află în pătrate între care calul poate sări. Observați și alternanța culorilor: numerele impare sunt toate pe pătrate de o culoare, iar cele pare pe cealaltă, așa cum cere punctul a). Argumentul arată imposibilitatea doar pentru tablele $n \times n$ cu n impar.

Problema propusă 8. Hipercubul și codul Gray ★

a) Fiecare dintre cele n poziții poate fi 0 sau 1, deci Q_n are 2^n vârfuri. Dintr-un șir obținem un vecin schimbând unul dintre cei n biți, deci fiecare vârf are gradul n. Din lema strângerilor de mână, numărul muchiilor este $\frac{n\,2^n}{2} = n\,2^{n-1}$. De exemplu, Q_3 are 8 vârfuri și 12 muchii, ca un cub.

b) Împărțim vârfurile după paritatea numărului de biți egali cu 1. De-a lungul unei muchii se schimbă un singur bit, deci numărul de biți 1 crește sau scade cu 1 și paritatea se schimbă. Orice muchie unește un șir cu un număr par de biți 1 cu unul cu un număr impar, deci Q_n este bipartit. Fiecare parte are 2^{n-1} vârfuri.

c) Desenăm Q_3 ca un cub: fiecare bit corespunde unei direcții.



Ciclul hamiltonian (roșu în desen) este

$$000 \to 001 \to 011 \to 010 \to 110 \to 111 \to 101 \to 100 \to 000.$$

Două șiruri consecutive diferă într-un singur bit, inclusiv ultimul și primul.

d) Demonstrăm prin inducție după $n \geq 2$ construcția *codului Gray reflectat*. Pentru $n = 2$, ciclul $00 \to 01 \to 11 \to 10 \to 00$ convine. Presupunem că $g_1, g_2, \ldots, g_m$, cu $m = 2^{n-1}$, este un ciclu hamiltonian în Q_{n-1}. Construim lista

$$0g_1,\ 0g_2,\ \ldots,\ 0g_m,\ 1g_m,\ 1g_{m-1},\ \ldots,\ 1g_1,$$

adică scriem lista inițială cu un 0 în față, apoi aceeași listă în ordine inversă, cu un 1 în față.

- Lista conține toate cele 2^n șiruri de n biți, câte o dată.
- În prima jumătate, două șiruri consecutive diferă ca g_i și g_{i+1}, adică într-un singur bit. La fel în a doua jumătate.
- La mijloc, $0g_m$ și $1g_m$ diferă doar în primul bit. La final, $1g_1$ și $0g_1$ diferă tot doar în primul bit, deci ciclul se închide.

Lista este deci un ciclu hamiltonian în Q_n. Pentru $n = 3$ obținem exact ciclul de la c). Codul Gray se folosește, de exemplu, la senzorii care măsoară poziția unui ax rotativ: între două poziții vecine se schimbă un singur bit, deci o citire făcută chiar în momentul trecerii nu poate da o valoare complet greșită.

Problema propusă 9. Acoperiri cu dominouri

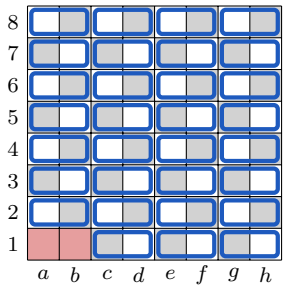
a) Construim graful bipartit G cu vârfurile cele 64 de pătrate, două pătrate fiind unite dacă au o latură comună. Pătratele vecine au culori diferite, deci G este bipartit, cu părțile A (cele 32 de pătrate albe) și B (cele 32 de pătrate negre). Un domino acoperă exact o muchie a lui G. O acoperire cu 32 de dominouri corespunde unei mulțimi de 32 de muchii în care fiecare pătrat apare exact o dată, adică unui *cuplaj perfect* în G.

b) Două colțuri opuse, de exemplu $a1$ și $h8$, au aceeași culoare. După eliminarea lor rămân 30 de pătrate de acea culoare și 32 de cealaltă. Fiecare domino acoperă un pătrat alb și unul negru, deci 31 de dominouri ar acoperi 31 de pătrate din fiecare culoare. Acoperirea este imposibilă. În limbajul cuplajelor: părțile au mărimi diferite, deci nu există cuplaj perfect.

c) Da. Două pătrate vecine au culori diferite, deci rămân câte 31 de pătrate din fiecare culoare. O acoperire explicită: eliminăm, de exemplu, $a1$ și $b1$.

- Pe rândul 1 rămân pătratele $c1, \ldots, h1$, acoperite cu 3 dominouri orizontale: $c1\,d1$, $e1\,f1$, $g1\,h1$.
- Fiecare dintre rândurile $2, \ldots, 8$ se acoperă cu 4 dominouri orizontale.

În total $3 + 7 \cdot 4 = 31$ de dominouri. Același procedeu funcționează pentru orice pereche de pătrate vecine de pe margine: acoperim rândul sau coloana respectivă cu dominouri așezate de-a lungul ei, iar restul tablei pe rânduri sau pe coloane.



Problema propusă 10. Maximizarea profitului

Algoritmul ungar minimizează costuri. Conform variantei de maximizare, înlocuim fiecare profit p_{ij} cu $8 - p_{ij}$, unde 8 este profitul maxim din tabel. Matricea de „pierderi” este

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pierderea totală a unei repartizări este $4 \cdot 8 -$(profitul total), deci minimizarea pierderii maximizează profitul.

Pasul 1 (linii). Scădem minimul fiecărei linii: 0, 2, 0, 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasul 2 (coloane). Minimele coloanelor sunt 0, 0, 0, 1, deci scădem 1 din ultima coloană:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \mathbf{0} & 1 \\ 2 & \mathbf{0} & 1 & 2 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Pasul 3. Zerourile se află pe pozițiile (V_1, M_3), (V_2, M_2), (V_3, M_1), (V_4, M_3) și (V_4, M_4). Zerourile îngroșate sunt independente (câte unul pe fiecare linie și pe fiecare coloană), deci sunt necesare 4 linii pentru a acoperi toate zerourile și algoritmul se oprește. Pasul de modificare nu mai este necesar.

Repartizarea optimă este

$$V_1 \to M_3, \quad V_2 \to M_2, \quad V_3 \to M_1, \quad V_4 \to M_4,$$

cu profitul total $8 + 6 + 8 + 6 = 28$ de mii de lei.

Verificare. Suma constantelor scăzute este $(0+2+0+1)+1 = 4$, egală cu pierderea repartizării găsite, $0 + 2 + 0 + 2 = 4$. Deci pierderea minimă este 4, iar profitul maxim este $32 - 4 = 28$. De remarcat că vânzătorul V_4 nu primește magazinul M_3, unde are cel mai mare profit (7), deoarece acolo V_1 aduce mai mult (8).

Problema propusă 11. Orar

Ca în Problema 12, construim un graf bipartit (cu muchii multiple) cu profesorii de o parte și clasele de cealaltă, câte o muchie pentru fiecare oră. Un interval orar este un cuplaj, iar un orar cu k intervale este o colorare a muchiilor cu k culori. Conform teoremei lui König, numărul minim de intervale este gradul maxim Δ.

a) Gradele sunt: Prof1, Prof2, Prof3 au câte 3 ore, iar Cl1, Cl2, Cl3 au câte 3 ore. Deci $\Delta = 3$ și sunt necesare 3 intervale. Fiecare interval trebuie să conțină exact 3 ore, câte una pentru fiecare profesor și pentru fiecare clasă:

	Interval 1	Interval 2	Interval 3
Prof1	Cl1	Cl2	Cl2
Prof2	Cl3	Cl1	Cl3
Prof3	Cl2	Cl3	Cl1

Verificare: în fiecare coloană clasele sunt diferite, iar fiecare profesor are la fiecare clasă numărul cerut de ore (Prof1: o oră la Cl1 și două la Cl2, Prof2: o oră la Cl1 și două la Cl3, Prof3: câte o oră la fiecare clasă).

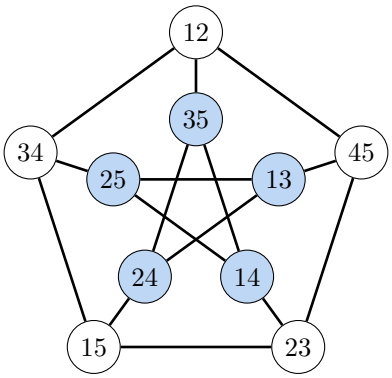
b) Prof1 are acum 4 ore, iar Cl3 are 4 ore, deci $\Delta = 4$ și sunt necesare cel puțin 4 intervale. Patru intervale ajung: păstrăm orarul de la a) și adăugăm intervalul 4, în care Prof1 predă la Cl3, iar ceilalți sunt liberi.

	Interval 1	Interval 2	Interval 3	Interval 4
Prof1	Cl1	Cl2	Cl2	Cl3
Prof2	Cl3	Cl1	Cl3	–
Prof3	Cl2	Cl3	Cl1	–

O singură oră în plus poate deci crește numărul de intervale, deoarece crește gradul maxim.

Problema propusă 12. Graful lui Petersen ★

a) Există $\binom{5}{2} = 10$ vârfuri. O submulțime $\{a, b\}$ este disjunctă de submulțimile cu două elemente ale mulțimii rămase, care are 3 elemente, deci de $\binom{3}{2} = 3$ submulțimi. Fiecare vârf are gradul 3, iar numărul de muchii este $10 \cdot 3/2 = 15$.



b) *Fără triunghiuri.* Trei vârfuri adiacente două câte două ar fi trei submulțimi cu două elemente, disjuncte două câte două, deci ar conține 6 elemente distincte, dar avem doar 5.

Fără cicluri de lungime 4. Presupunem că a, b, c, d formează un ciclu $a\,b\,c\,d\,a$. Atunci a și c sunt disjuncte de b, deci sunt submulțimi cu două elemente ale mulțimii cu 3 elemente $\{1, \ldots, 5\} \setminus b$. Fiind diferite, $a \cup c$ este chiar această mulțime, deci b este complementara lui $a \cup c$. La fel, d este disjunctă de a și de c, deci d este tot complementara lui $a \cup c$. Rezultă $b = d$, contradicție. Așadar cel mai scurt ciclu are lungimea 5 (de exemplu, ciclul exterior din desen).

c) Presupunem că graful ar fi planar și ar avea un desen fără intersecții, cu f fețe. Din formula lui Euler, $f = 2 - v + e = 2 - 10 + 15 = 7$. Ca în Problema 14, numărăm perechile (față, muchie de pe frontiera ei) în două moduri.

- *După muchii.* O muchie desenată are două „maluri”, câte unul de fiecare parte, iar fiecare mal aparține unei singure fețe. Deci fiecare muchie se află pe frontiera a cel mult două fețe, iar numărul perechilor este cel mult $2e = 30$.
- *După fețe.* Frontiera fiecărei fețe conține un ciclu al grafului. Într-adevăr, dacă frontiera B a unei fețe nu ar conține niciun ciclu, B ar fi o pădure (un graf fără cicluri). O pădure desenată în plan nu separă planul: din orice punct din afara ei se poate ajunge în orice alt astfel de punct fără a o traversa. Fața, delimitată doar de B, ar ocupa atunci tot planul din afara lui B, deci graful nu ar avea alte muchii decât cele din B și ar fi el însuși o pădure. Este fals, deoarece graful are cicluri (de exemplu, ciclul exterior din desen). Conform punctului b), orice ciclu are cel puțin 5 muchii, deci fiecare față are pe frontieră cel puțin 5 muchii, iar numărul perechilor este cel puțin $5f = 35$.

Am obține $35 \leq 30$, contradicție. Graful lui Petersen nu este planar. În cazul lui $K_{3,3}$ argumentul folosea lipsa ciclurilor de lungime 3 (fețe cu cel puțin 4 muchii), iar aici folosim lipsa ciclurilor de lungime 3 și 4.

Problema propusă 13. Un campionat neterminat

Echipele sunt vârfurile, iar meciurile disputate sunt muchiile unui graf cu $n = 10$ vârfuri. Trei echipe care au jucat fiecare cu fiecare formează un triunghi.

a) Conform teoremei lui Mantel (Problema 16), un graf cu n vârfuri fără triunghiuri are cel mult $\lfloor n^2/4 \rfloor$ muchii. Pentru $n = 10$, acest maxim este 25. Graful are 26 de muchii, mai mult decât maximul, deci conține un triunghi: există trei echipe care au jucat deja fiecare cu fiecare.

b) Nu. Împărțim echipele în două grupe de câte 5 și presupunem că s-au jucat exact meciurile dintre echipe din grupe diferite. Graful obținut este $K_{5,5}$, cu $5 \cdot 5 = 25$ de muchii. Fiind bipartit, nu are cicluri impare, deci nici triunghiuri: oricare trei echipe includ două din aceeași grupă, care nu au jucat între ele. Prin urmare, cu 25 de meciuri afirmația poate fi falsă, iar numărul 26 de la punctul a) este cel mai mic posibil.